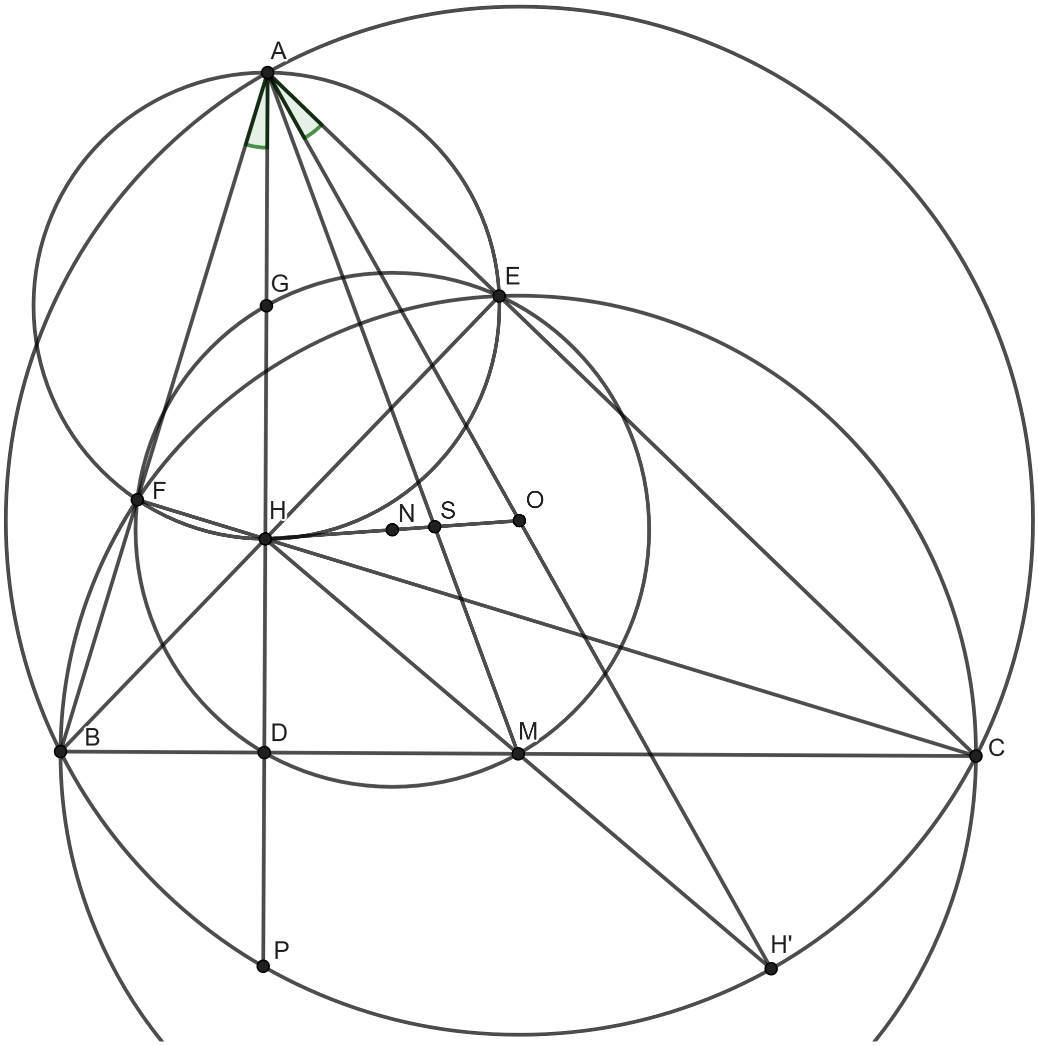
OLIMPIAI ISKOLA

SZAKKÖR

Átfogó geometriai konfigurációk

Imolay András, olimpiai iskola tábor

A. ábra

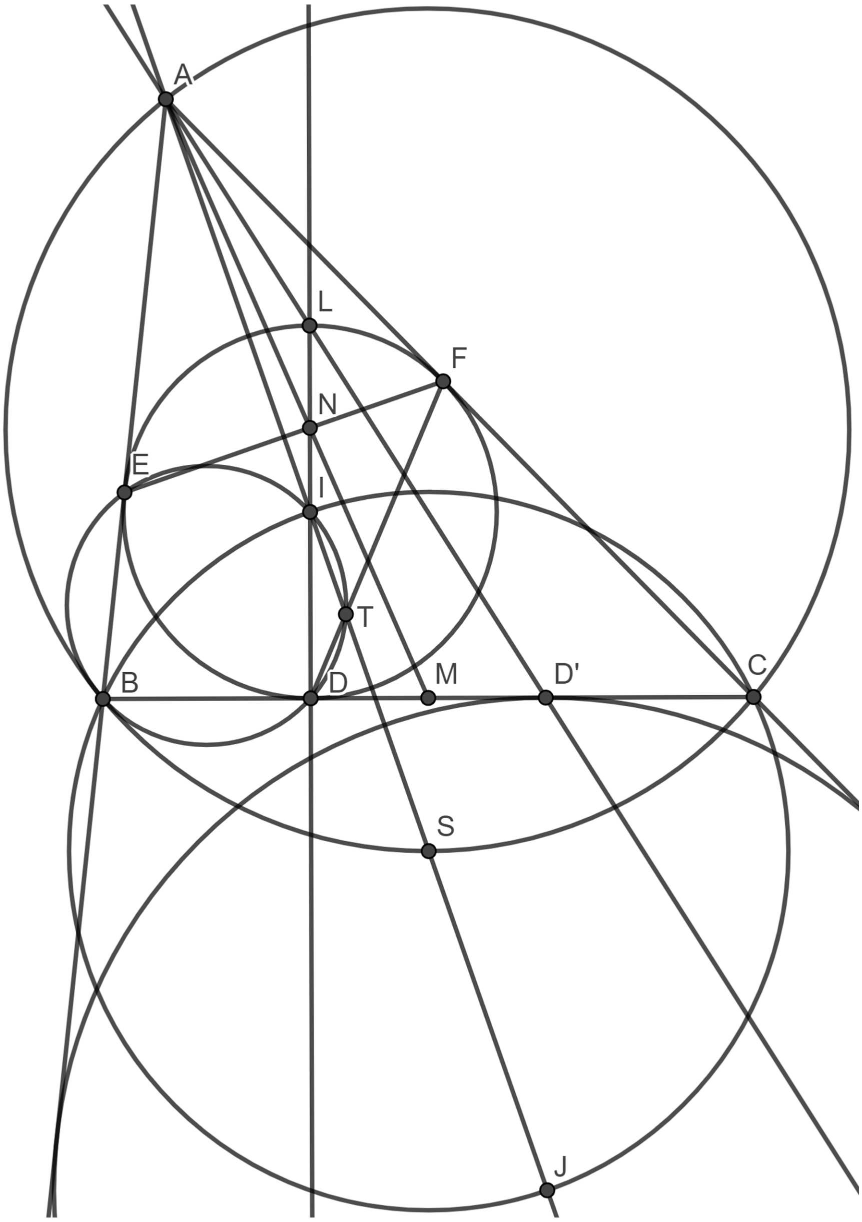


Az ábrán látható pontokat a következőképpen kaptuk. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja H, súlypontja S, köréírt körének középpontja O. Az A, B, C pontból induló magasságok talppontjai rendre D, E, F. Legyen a BC szakasz felezőpontja M, az AH szakasz felezőpontja G. Jelölje P és H' a H pont tükörképét rendre a D és M pontokra. Végül legyen N a DEF háromszög köréírt körének középpontja.

2024. október 26.

Szakkörvezető: Imolay András imolay.andras@gmail.com
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

B. ábra



Az ábrán látható pontokat a következőképpen kaptuk. Az ABC hegyesszögű háromszög beírt körének középpontja I, a beírt kör érintési pontjai D, E, F. Legyen J az A-val szemközti hozzáírt kör középpontja. Az M pont a BC szakasz felezőpontja, és D' a D pont tükörképe M-re. A DI egyenes az AM és AD' egyeneseket rendre az N és L pontokban metszi. Legyen S a rövidebb BC ív felezőpontja a köréírt körön. Végül legyen T az AI szögfelező és a DF egyenes metszéspontja.

2024. október 26.
Szakkörvezető: Imolay András imolay.andras@gmail.com
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

Feladatok az A. ábrán

A/1. Mutassuk meg, hogy B, F, E, C pontok egy körön vannak, melynek középpontja M.

A/2. Mutassuk meg, hogy A, F, H, E pontok egy körön vannak, melynek középpontja G.

A/3. Mutassuk meg, hogy $BAH\sphericalangle = OAC\sphericalangle$.

A/4. Mutassuk meg, hogy a P és H' pontok az ABC háromszög köréírt körére esnek.

A/5. Mutassuk meg, hogy az A, O, H' pontok egy egyenesre esnek.

A/6. Mutassuk meg, hogy a D, M, E, G, F pontok egy körön vannak, melyek középpontja N.

A/7. Mutassuk meg, hogy a H, N, S, O pontok egy egyenesen vannak, és $HN = NO = \frac{3}{2}SO$.

A/8. Keressünk további érdekes összefüggéseket az ábrán (akár további pontok felvételével).

Feladatok a B. ábrán

B/1. Mutassuk meg, hogy az A, I, T, S, J pontok egy egyenesre esnek.

B/2. Mutassuk meg, hogy az E, F, N pontok egy egyenesre esnek.

B/3. Mutassuk meg, hogy a C, I, B, J pontok egy körön vannak, és ennek a körnek a középpontja S.

B/4. Mutassuk meg, hogy a D' pont a hozzáírt kör érintési pontja.

B/5. Mutassuk meg, hogy L rajta van a beírt körön.

B/6. Mutassuk meg, hogy a B, E, I, T, D pontok egy körre esnek.

B/7. Mutssuk meg, hogy MT és AC párhuzamos, azaz T rajta van az ABC háromszög egyik középvonalán.

B/8. Mutassuk meg, hogy $ATB\sphericalangle = 90°$.

B/9. Keressünk további érdekes összefüggéseket az ábrán (akár további pontok felvételével).

2024. október 26.
Szakkörvezető: Imolay András imolay.andras@gmail.com
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

További feladatok (nem lettek megbeszélve)

F/1. Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja I. Legyen P a háromszög belsejében egy olyan pont, melyre

$$PBA\sphericalangle + PCA\sphericalangle = PBC\sphericalangle + PCB\sphericalangle.$$

Bizonyítsuk be, hogy $AP \geq AI$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha P egybeesik I-vel.

F/2. Az ABC hegyesszögű háromszög köréírt körének középpontja O, magasságpontja H. Az AH szakasz felezőmerőlegese az AB és AC oldalakat rendre a D és E pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $DOA\sphericalangle = EOA\sphericalangle$.

F/3. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melyre $BAC\sphericalangle = 60°$ és $AB > AC$. Jelölje I a háromszög beírt körének középpontját, H pedig a magasságpontját. Bizonyítsuk be, hogy $2AHI\sphericalangle = 3ABC\sphericalangle$.

F/4. Legyen P egy pont az ABC háromszög köréírt körén. Bizonyítsuk be, hogy ha P-t türözzük a háromszög oldalaira, akkor a kapott pontok egy olyan egyenesen vannak, amely áthalad az ABC háromszög magasságpontján.

F/5. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melyre $AB \neq AC$, H a háromszög magasságpontja, és M a BC oldal felezőpontja. Az AB oldalon vegyünk fel egy D pontot, az AC oldalon pedig egy E pontot úgy, hogy $AE = AD$ és a D, H, E pontok egy egyenesre esnek. Bizonyítsuk be, hogy HM merőleges az ABC és ADE háromszögek köréírt köreinek közös húrjára.

F/6. Az ABC háromszögben $AB + BC = 3AC$. A háromszög beírt körének középpontja I, és a beírt kör az AB és BC oldalakat rendre a D és E pontokban érinti. Legyen K és L rendre a D és E pontoknak az I pontra vett tükörképei. Bizonyítsuk be, hogy az $ACKL$ négyszög húrnégyszög.

F/7. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melynek a beírt köre az AC és AB oldalakat rendre az E és F pontokban érinti. Legyenek az $ABC\sphericalangle$ és $ACB\sphericalangle$ szögfelezőinek EF-fel vett metszéspontjai rendre X és Y, továbbá legyen a BC oldal felezőpontja Z. Bizonyítsuk be, hogy XYZ pontosan akkor szabályos háromszög, ha $BAC\sphericalangle = 60°$.

F/8. Az ABC háromszög A-ból induló súlyvonala az ω beírt kört a K és L pontokban metszi. A K és L pontokon keresztül a BC-vel párhuzamos egyenesek az ω-t másodszor az X és Y pontokban metszik. Az AX és AY egyenesek a BC egyenest rendre a P és Q pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy $BP = CQ$.

F/9. Az ABC háromszög magasságpontja H, beírt körének középpontja I, és köréírt körének középpontja O. Legyen K a beírt kör érintési pontja a BC oldalon. Bizonyítsuk be, hogy ha IO párhuzamos BC-vel, akkor AO párhuzamos HK-val.

2024. október 26.

Szakkörvezető: Imolay András imolay.andras@gmail.com
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

Beadható házi feladatok

HF/1. Legyen az ABC hegyesszögű háromszögben az A, B, C csúcsokból induló magasságok talppontja rendre D, E, F. Mutssuk meg, hogy az ABC háromszög H magasságpontja a DEF háromszög beírt körének középpontja.

HF/2. (Simson-egyenes) Legyen P egy pont az ABC háromszög köréírt körén. Mutassuk meg, hogy ha P-ből merőlegest állítunk ABC oldalegyeneseire, akkor a merőlegesek talpponjtai egy egyenesre esnek.

HF/3. Legyen ABC olyan háromszög, melyben $AB \neq AC$. Jelölje a háromszög beírt körének középpontját I. Messe a BIC háromszög köréírt köre az AB és AC oldalegyeneseket másodszor rendre az M és N pontokban. Mutassuk meg, hogy az MN egyenes érinti az ABC háromszög beírt körét.

HF/4. Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja I. Legyen P a háromszög belsejében egy olyan pont, melyre

$$PBA\sphericalangle + PCA\sphericalangle = PBC\sphericalangle + PCB\sphericalangle.$$

Bizonyítsuk be, hogy $AP \geq AI$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha P egybeesik I-vel.

HF/5. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melyre $BAC\sphericalangle = 60°$ és $AB > AC$. Jelölje I a háromszög beírt körének középpontját, H pedig a magasságpontját. Bizonyítsuk be, hogy $2AHI\sphericalangle = 3ABC\sphericalangle$.

HF/6. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melynek a beírt köre az AC és AB oldalakat rendre az E és F pontokban érinti. Legyenek az $ABC\sphericalangle$ és $ACB\sphericalangle$ szögfelezőinek EF-fel vett metszéspontjai rendre X és Y, továbbá legyen a BC oldal felezőpontja Z. Bizonyítsuk be, hogy XYZ pontosan akkor szabályos háromszög, ha $BAC\sphericalangle = 60°$.

2024. október 26.

Szakkörvezető: Imolay András imolay.andras@gmail.com
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu