

Függvényegyenletek

Kovács Benedek szakköre

F/1. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, hogy

$$f(xf(y) + 2y) = f(xy) + xf(y) + f(f(y)).$$

F/2. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, hogy

$$xf(y) + f(xf(y)) - xf(f(y)) - f(xy) = 2x + f(y) - f(x + y).$$

F/3. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, hogy

$$f(x^2) - f(y^2) \leq (f(x) + y)(x - f(y)).$$

F/4. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, hogy

$$f(x + f(x + y)) = x + f(f(x) + y).$$

F/5. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, hogy

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x + y).$$

F/6. (Cauchy-függvényegyenlet)

(a) Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ függvényt, melyre teljesül minden $x, y \in \mathbb{Q}$ esetén, hogy $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(b) Mi a helyzet, ha a folytonos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények körében vizsgáljuk az egyenletet?

F/7. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ függvényt, melyre $f(1) = 2$ és minden $x, y \in \mathbb{Q}$ -ra

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1.$$

A feladatok forrása:

1. MEMO 2019/1
2. MEMO 2014/1
3. MEMO 2021/T1
4. MEMO 2022/1
5. MEMO 2017/1

2024. április 20.

Szakkörvezető: Kovács Benedek (benoke981@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com