OLIMPIAI ISKOLA

SZAKKÖR

LTE lemma és társai

Kocsis Anett szakköre

Tétel (LTE lemma). Legyen p prím és x, y olyan egész számok, melyek nem oszthatóak p-vel. Ekkor

- ha $p \neq 2$ és $p \mid x - y$, akkor
$$\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y) + \nu_p(n),$$
- ha $p \neq 2$, n páratlan és $p \mid x + y$, akkor
$$\nu_p(x^n + y^n) = \nu_p(x + y) + \nu_p(n),$$
- ha $p = 2$ és $4 \mid x - y$, akkor
$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y) + \nu_2(n),$$
- ha $p = 2$, n páros és $2 \mid x - y$, akkor
$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y) + \nu_2(x + y) + \nu_2(n) - 1.$$

Feladatok

F/1. Legyenek x, y, p olyanok, melyekre teljesül az LTE lemma első pontjának feltétele.
a) Tegyük fel, hogy $p \nmid n$. Lássuk be hogy $\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y)$.
b) Lássuk be hogy $\nu_p(x^p - y^p) = \nu_p(x - y) + 1$.
c) Lássuk be ennek segítségével a lemmát páratlan prímekre.

F/2. **a)** Bizonyítsuk be, hogy $2^{3^n} + 1$ minden n természetes számra osztható 3^{n+1}-nel. (KöMaL B. 3908.)
b) Legyen k rögzített. Melyek azok az n számok, melyekre $3^k \mid 2^n - 1$?

F/3. Igazoljuk, hogy $\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

F/4. (KöMaL) Legyen n nemnegatív egész szám. Határozzuk meg a 7 kitevőjét a $3^{7^n} + 4^{7^n}$ prímtényezős alakjában.

2024. április 6.
Szakkörvezető: Kocsis Anett (sakkboszi@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com

F/5. **a)** Konstruáljunk végtelen sok olyan n-et, amelyre $n \mid 6^n - 1$.
b) Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ és $n \mid 6^n - 1$, akkor $5 \mid n$.

F/6. Legyen $k > 1$ rögzített pozitív egész. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan n van, melyre $n \mid 1^n + 2^n + \ldots k^n$.

F/7. Tegyük fel, hogy a, n pozitív egészek, p pedig páratlan prímszám, továbbá $a^p \equiv 1 \pmod{p^n}$. Igazoljuk, hogy ekkor $a \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$.

F/8. Keressük meg az összes olyan pozitív egész n, m számpárt, melyre

$$(n-1)! + 1 = n^m.$$

F/9. (KöMaL) Oldjuk meg a pozitív egész számok körében a következő egyenletet: $n! = 2^a - 2^b$.

Lekötő feladatok

F/1. (Russia, 1996) Melyek azok az n pozitív egész számok, melyre léteznek olyan egymáshoz relatív prím x, y pozitív egészek, és $k > 1$ egész, hogy $x^k + y^k = 3^n$?

F/2. Keressünk meg az összes olyan pozitív egész a, b számpárt, melyre

$$b^a \mid a^b - 1$$

.

F/3. (IMO 1990/3) Keressük meg az összes olyan n pozitív egész számot, melyre $\frac{2^n+1}{n^2}$ is egész.

F/4. (IMO 2022/5) Keressük meg az összes olyan (a, b, p) számhármast, melyre a és b pozitív egészek, p prím, továbbá teljesül, hogy:

$$a^p = b! + p.$$

F/5. Legyenek x, y pozitív racionális számok, amelyekhez végtelen sok olyan n létezik, melyre $x^n - y^n$ pozitív egész. Mutassuk meg, hogy ekkor x és y is egész.

F/6. Legyenek $a \neq b$ olyan valós számok, melyekre

$$a - b, a^2 - b^2, a^3 - b^3 \ldots$$

mind egészek. Mutassuk meg, hogy ekkor a és b is egész.

F/7. (IMO Shortlist, 2014/N5) Keressük meg az összes x, y, p számhármast, melyre p prím, x, y pedig pozitív egész számok, továbbá $x^{p-1} + y$ és $x + y^{p-1}$ is p hatványai.

2024. április 6.
Szakkörvezető: Kocsis Anett (sakkboszi@gmail.com)
Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@gmail.com