

Olimpiai szakkör december 1.

1. Igaz-e, hogy minden egész együtthatós tizedfokú $P(x)$ polinomhoz létezik olyan, mindkét irányban végtelen számtani sorozat, amely nem tartalmazza P egyetlen egész helyen felvett értékét sem?
2. Az ABC háromszög beírt köre a BC , CA , AB oldalakat rendre az A_1 , B_1 , C_1 pontokban érinti. Az ABC köré írt kör A -t nem tartalmazó BC ívének felezőpontja A_2 , hasonlóan definiáljuk a B_2 és C_2 pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek át.
3. Egy városban 16 titkosügynök dolgozik. Minden ügynök legalább egy másikat figyel, de nincs két ügynök, akik egymást figyelnek. Bármely 10 ügynök leültethető egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki a bal oldali szomszédját figyeli. Mutassuk meg, hogy bármely 11 is leültethető így.
4. A k kör belsejében van az $ABCD$ négyzet. Tekintsük azt a kört, amely belülről érinti k -t és érinti az AB és AD egyenesek A -ból induló B -t és D -t nem tartalmazó felét, ez a kör k -t A' -ben érinti. Hasonlóan kapjuk B' , C' és D' pontokat. Igazoljuk, hogy AA' , BB' , CC' és DD' egy ponton mennek át.
5. A Bergengóc parlamentben 1600 képviselő van, akik 16000 bizottságot hoztak létre, mindegyikben 80 fővel. Mutassuk meg, hogy kiválasztható két bizottság úgy, hogy legalább 4 közös tagjuk legyen.
6. A koordináta-rendszer négy, egész koordinátájú pontjában van egy-egy bábu. Bármelyik eltolható, két másik által meghatározott vektorral. Igazoljuk, hogy bármely két előre kiszemelt bábu egy helyre mozgatható véges sok ilyen lépéssel.
7. Egy $n \times n$ -es táblába beírjuk az $1, 2, \dots, n^2$ számokat. Minden szám beírásakor felírjuk egy papírra a sorába és oszlopába már beírt számok összegét. Hogyan töltsük ki a táblát, hogy a papírra írt számok összege a lehető legkisebb legyen?
8. Az ABC háromszög CA , AB és BC oldalainak belső pontjai rendre B' , C' és A' , amelyekre $CB'/CA=AC'/AB=BA'/BC=\lambda < 1/2$. Az AA' és BB' szakaszok metszéspontja P , BB' és CC' metszéspontja Q és CC' és AA' metszéspontja R . Ha az ABC háromszög területe T , a PQR háromszög területe t , akkor $T:t=13:4$ esetén mekkora λ értéke?