

Olimpiai szakkör 2023. október 20.

1. 6 irrac szám között mindig található-e három olyan, amelyek közül bármely kettő összege irrac?
2. 3 fiú és 7 lány táncol. Biz lesz 2 fiú és 2 lány akik vagy egyáltalán nem táncoltak egymás közt, vagy minden párosításban táncoltak.
3. Az ABC háromszög oldalaira kívülre rajzolt négyzetek legyenek ABB_1A' , ACC_1A'' , és $BCDE$, a $BCDE$ négyzet középpontja legyen P . Bizonyítsuk be, hogy az $A'C$, $A''B$ és PA egyenesek egy ponton mennek át.
4. 10 ember találkozik, bármely 3 közt volt 2, akik nem fogtak kezét. Biz van 4, akik közt nem volt.kézfogás.
5. K_6 éleit két színnel színezve legkevesebb hány egyszínű háromszög keletkezik? K_7 , K_8 ?
6. Mennyi az a, b, c betűkből készített olyan, 2023 hosszú sorozatok száma, amelyekben az a, b, c betűk mindegyike páratlan sokszor fordul elő?
7. Egy n tagú társaság tagjai páronként ismerik, vagy nem ismerik egymást. Mindkét esetben ez legyen kölcsönös. Szeretnénk közülük négy embert leültetni egy kerek asztal köré úgy, hogy a szomszédok vagy mind ismerősök legyenek, vagy egyik szomszédpár se ismerje egymást. Mely n értékre vállalhatjuk, hogy biztosan létre tudunk hozni ilyen asztaltársaságot akkor, ha nem is ismerjük előre a társaságban levő ismerettségi viszonyokat?
8. Az $1, 2, \dots, n$ közt minden párt összekötünk piros, fehér, vagy zöld vonallal. Határozzuk meg a legkisebb n értéket, amire lesz $a < b < c < d$, melyekre ab, bc, cd színe azonos.
9. Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$, páronként különböző pozitív valósak. Közülük vegyük az első n -et, ezek összegét megszorozzuk a reciprokaik összegével, az így kapott szám gyöke a_n , ami $n=1, 2, \dots, 2023$ esetén egész. Mutassuk meg, hogy a_{2023} legalább 3034.