Olimpiai szakkör 2023. szeptember 22.

1. $ABCDEFG$ konvex hétszög oldalai páronként különbözőek. Hányféleképpen osztható fel egymást nem metsző átlókkal a hétszög háromszögekre?
2. Határozzuk meg az összes olyan $n>1$ összetett számot, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$ jelölik n pozitív osztóit, akkor $d_{i+1}+d_{i+2}$ osztható d_i-vel minden $1\leq i\leq k-2$ esetén.
3. 5 A és 5 B betűből hány olyan 10 karakteres jelsorozat készíthető, amelynek minden kezdőszeletében legalább annyi A van, mint B?
4. Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja I. A kör a BC és AC oldalakat rendre a D és E pontokban érinti. Legyen a BI és DE egyenesek metszéspontja G. Bizonyítsd be, hogy AG merőleges BG-re.
5. Egy 8 tagú családról fénykép készül. Nincs két azonos magasságú ember. Két sorban szeretnének elhelyezkedni úgy, hogy mindkét sorban az emberek balról jobbra növekvő sorrendben legyenek és a hátsó sorban álló nagyobb legyen az első sorban előtte álló személynél. Hányféle lehet a fénykép?
6. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amelyben $AB<AC$. Jelölje ABC köréírt körét Ω, melyen legyen S (az A pontot nem tartalmazó) CB ív felezőpontja. Az A pontból BC-re bocsátott merőleges a BS egyenest D-ben, az Ω kört pedig az $E\neq A$ pontban metszi. Továbbá a BC-vel párhuzamos, D ponton átmenő egyenes az L pontban metszi a BE egyenest. Jelölje a BDL háromszög körülírt körét ω, és legyen P az ω és Ω körök B-től különböző metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy az ω-hoz P-ben húzott érintő és a BS egyenes a $BAC\angle$ belső szögfelezőjén metszik egymást.
7. Legyenek p és q rögzített relatív prím pozitív egészek. A nemnegatív egészek egy S részhalmazát ideális részhalmaznak nevezzük, ha a következő két feltétel egyszerre teljesül: (i) S tartalmazza a 0-t; (ii) ha n S-beli elem, akkor $n+p$ és $n+q$ is az. Határozzuk meg az S ideális részhalmazok számát.