



Language: Hungarian

Day: 1

2023. április 15. szombat

Feladat 1. Adott $n \geq 3$ darab pozitív valós szám $a_1, a_2, \dots, a_n$. Minden $1 \leq i \leq n$ -re legyen $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (itt az a_0 -t a_n -nek definiáljuk, az a_{n+1} -et pedig a_1 -nek). Tegyük fel, hogy tetszőleges $1 \leq i, j \leq n$ esetén $a_i \leq a_j$ pontosan akkor teljesül, ha $b_i \leq b_j$ teljesül.

Bizonyítsuk be, hogy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Feladat 2. Adott az ABC hegyesszögű háromszög. Legyen D az a pont a körülírt körén, amire AD átmérő. A K és L pontok rendre az AB illetve AC szakaszokon helyezkednek el úgy, hogy DK és DL érintik az AKL háromszög körülírt körét.

Bizonyítsuk be, hogy a KL egyenes átmegy az ABC háromszög magasságpontján.

Egy háromszög magasságpontja a magasságvonalak metszéspontja.

Feladat 3. Legyen k egy pozitív egész szám. Lexinek van egy $\mathcal{D}$ szótára, ami valahány k betűs szóból áll és minden szó csak az A és B betűket tartalmazza. Lexi szeretné egy $k \times k$ -as rács minden mezőjébe vagy az A vagy a B betűt beleírni úgy, hogy mindegyik oszlop egy $\mathcal{D}$ -beli szót tartalmazzon felülről lefelé olvasva, és mindegyik sor egy $\mathcal{D}$ -beli szót tartalmazzon balról jobbra olvasva.

Mi az a legkisebb m egész amire teljesül, hogy ha $\mathcal{D}$ tartalmaz legalább m különböző szót, akkor Lexi ki tudja tölteni a rácsot ezen a módon, függetlenül attól, hogy milyen szavak vannak $\mathcal{D}$ -ben?

Language: Hungarian

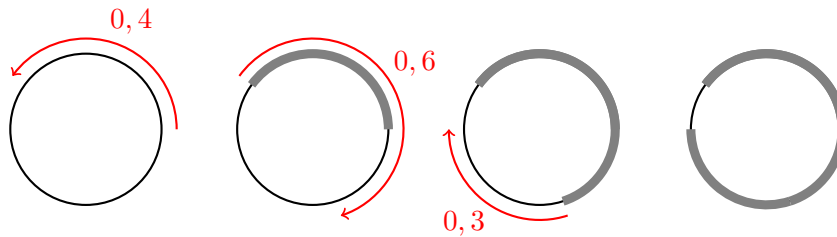
Idő: 4 óra 30 perc
Minden feladat 7 pontot ér

A feladatok titkosak április 16. vasárnap 22:00 UTC-ig (magyar idő szerint éjfélig).

2023. április 16. vasárnap

Feladat 4. Turbó a csiga egy körvonal egyik pontján ül, melynek kerülete 1. Pozitív valós számok adott $c_1; c_2; c_3; \dots$ végtelen sorozatára Turbó egymás után megteszi a $c_1; c_2; c_3; \dots$ távolságokat a körvonalon, minden alkalommal eldöntve, hogy az óramutató járásával megegyező, vagy ellentétes irányban mászik.

Például, ha a $c_1; c_2; c_3; \dots$ sorozat a $0,4; 0,6; 0,3; \dots$ sorozat, akkor Turbó elkezdheti a mászást az alábbi módon:



Határozzuk meg azt a legnagyobb $C > 0$ konstanst, melyre a következő teljesül: pozitív valós számok tetszőleges $c_1; c_2; c_3; \dots$ sorozatára, ahol $c_i < C$ minden i -re, Turbó biztosítani tudja (a sorozat tanulmányozása után), hogy van egy pont a körvonalon, amin sosem fog tartózkodni és amin sosem fog átmászni.

Feladat 5. Adott egy $s \geq 2$ pozitív egész szám. Tetszőleges k pozitív egésznek definiáljuk a *csavartját*, k' -t az alábbi módon: írjuk fel a k számot $as + b$ alakban, ahol a, b nemnegatív egészek és $b < s$, ekkor a csavartja $k' = bs + a$. Az n pozitív egészre tekintsük azt a $d_1, d_2, \dots$ végtelen sorozatot, amire $d_1 = n$ és d_{i+1} a d_i -nek a csavartja minden i pozitív egészre.

Bizonyítsuk be, hogy ebben a sorozatban pontosan akkor szerepel az 1, ha az n -nek az $s^2 - 1$ -gyel való osztási maradéka 1 vagy s .

Feladat 6. Legyen ABC egy háromszög, melynek a körülírt köre Ω . Jelölje rendre S_b és S_c a felezőpontját annak az AC illetve AB ívnek, ami nem tartalmazza a harmadik csúcsot. Jelölje N_a a felezőpontját a BAC ívnek (a BC ívnek, ami A -t tartalmazza). Legyen I az ABC háromszög beírt körének középpontja. Legyen ω_b az a kör, ami érinti AB -t és belülről érinti Ω -t az S_b -ben, és legyen ω_c az a kör, ami érinti AC -t és belülről érinti Ω -t az S_c -ben. Mutassuk meg, hogy az ω_b és ω_c körök metszéspontjain átmenő egyenes és az IN_a egyenes az Ω körön metszik egymást.

A beírt kör az a kör a háromszögben, ami a háromszög mindhárom oldalát érinti.

Language: Hungarian

Idő: 4 óra 30 perc
Minden feladat 7 pontot ér

A feladatok titkosak április 16. vasárnap 22:00 UTC-ig (magyar idő szerint éjfélig).