



EGMO 2021
GEORGIA
KUTAISI

Language: Hungarian

Day: 1

2021. április 11., vasárnap

1. Feladat 2021 egy *fantasztikus* szám. Ha egy pozitív egész m -re az $\{m, 2m + 1, 3m\}$ halmaz bármely eleme *fantasztikus*, akkor a halmaz összes eleme *fantasztikus*. Következik-e ebből, hogy 2021^{2021} *fantasztikus*?

2. Feladat Keressük meg az összes olyan $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ függvényt, amelyre

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

teljesül minden racionális x és y számra!

Itt \mathbb{Q} a racionális számok halmazát jelöli.

3. Feladat Legyen ABC egy háromszög, melynek az A csúcsánál tompaszöge van. Legyenek E és F rendre az A csúcsnál lévő külső szögfelező és az ABC háromszög B illetve C csúcsaiból induló magasságvonalak metszéspontjai. Legyenek M és N azon pontok rendre az EC és FB szakaszokon, melyekre $EMA \sphericalangle = BCA \sphericalangle$ és $ANF \sphericalangle = ABC \sphericalangle$. Bizonyítsd be, hogy az E, F, N, M pontok egy körön vannak!

Language: Hungarian

Megoldási idő: 4 óra 30 perc.

Minden feladat 7 pontot ér.

Ahhoz, hogy a verseny igazságos és mindenki számára élvezhető legyen, kérjük, hogy április 13. kedd (magyar idő szerint) 13:00-ig ne említsd meg, ne utalj a feladatokra az interneten, szociális hálókon!



2021. április 12., hétfő

4. Feladat Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja I és legyen D egy tetszőleges pont a BC oldalon. Legyen a D ponton átmenő BI -re merőleges egyenes és a CI egyenes metszéspontja E . Legyen a D ponton átmenő CI -re merőleges egyenes és a BI egyenes metszéspontja F . Bizonyítsd be, hogy az A pont EF egyenesre vett tükörképe a BC egyenesre esik!

5. Feladat Egy síknak van egy különleges pontja O , amit középpontnak hívunk. Legyen P egy 2021 pontból álló halmaz a síkon, melyre

(i) semelyik három P -beli pont nem esik egy egyenesre és

(ii) semelyik két P -beli pont nem esik egy a középponton átmenő egyenesre.

Egy háromszöget, melynek az összes csúcsa P -ben van *kövérek* hívunk, ha O szigorúan a háromszög belsejébe esik. Keresd meg a kövér háromszögek maximális számát!

6. Feladat Létezik-e olyan nemnegatív egész szám a , melyre az

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

egyenletnek több, mint egy millió különböző (m, n) megoldása van, ahol m és n pozitív egész számok?

Az $\lfloor x \rfloor$ kifejezés az x valós szám (alsó) egészrészét jelöli. Tehát $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ és $\lfloor 0 \rfloor = 0$.