Surányi János emlékverseny

2023/2. Olimpiai válogatóverseny, Csiba (Japán), július 2–13.

1. Egy 2022×2022-es táblán játszik két ember, felváltva jönnek, a kezdő legyen a kertész, a másik pedig a favágó. A játék kezdetén a tábla mindegyik mezőjén áll egy-egy 0 magasságú fa.

Ha a kertész következik, akkor kiválaszt egy mezőt. Minden fa, amely ezen a mezőn vagy valamelyik szomszédján áll, egy egységnyivel magasabb lesz. (Közös él vagy közös csúcs is szomszédságot jelent, tehát egy mezőnek legfeljebb 8 szomszédja lehet.)

Ha a favágó következik, akkor kiválaszt négy különböző mezőt. Minden pozitív magasságú fa, amely ezeken a mezőkön áll, egy egységnyivel alacsonyabb lesz.

Egy fát nevezzünk *égigérő*nek, ha a magassága legalább 10^6. Határozzuk meg a legnagyobb K számot, amelyre a következő állítás igaz: bárhogy játszik is a favágó, a kertész kitartó munkával el tud érni egy olyan állapotot, hogy legalább K mezőn égigérő fa áll.

2. Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög. Tegyük fel, hogy a Q, A, B, P pontok ebben a sorrendben egy egyenesen helyezkednek el, az AC egyenes érinti az ADQ háromszög köré írt kört, a BD egyenes pedig érinti a BCP háromszög köré írt kört. Legyen M és N rendre a BC, illetve az AD szakasz felezőpontja.

Bizonyítsuk be, hogy a következő három egyenes egy ponton halad át: a CD egyenes, az ANQ háromszög köré írt kört A-ban érintő egyenes, továbbá a BMP háromszög köré írt kört B-ben érintő egyenes.

3. Határozzuk meg az összes olyan $n \geq 2$ egész számot, amelyre léteznek $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ és $r > 0$ valós számok úgy, hogy az $\frac{1}{2}n(n-1)$ darab $a_j - a_i$ különbség ($1 \leq i < j \leq n$) valamilyen sorrendben éppen egyenlő az

$$r^1, r^2, \ldots, r^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

számokkal.