

2022. november 25., péntek

1. Az $ABCD$ paralelogrammában $\angle ABC < 90^\circ$. Legyen D' a D pont tükörképe az AB egyenesre. Legyen E tetszőleges pont a BC szakaszon, és F olyan pont a BC szakasz B -n túli meghosszabbításán, melyre $CE = BF$. Jelölje O az ABF háromszög köréírt körének középpontját. Bizonyítsuk be, hogy $OE = OD'$.
2. Egy pozitív egész számokból álló véges halmazt *érdekesnek* nevezünk, ha bárhogyan is választjuk ki 3 különböző a, b, c elemét, akkor az alábbi oszthatóságok mindegyike teljesül:

$$a \mid b^2 - c^2, \quad b \mid c^2 - a^2, \quad c \mid a^2 - b^2.$$

- a) Mely $n \geq 3$ számokra létezik n elemű érdekes halmaz?
 - b) Mely $n \geq 3$ számokra létezik olyan n elemű érdekes halmaz, amely elemeinek legnagyobb közös osztója 1 (azaz nem létezik olyan 1-nél nagyobb egész szám, ami a halmaz minden elemét osztja)?
3. Legyenek az x_1, x_2, \dots, x_{2n} olyan valós számok, melyekre $|x_{i+1} - x_i| \leq 1$ minden $1 \leq i \leq 2n - 1$ esetén és $|x_{2n} - x_1| \leq 1$. Legfeljebb mennyi lehet

$$|x_{n+1} - x_1| \cdot |x_{n+2} - x_2| \cdot \dots \cdot |x_{2n} - x_n|?$$

4. Egy 20 sorból és 2000 oszlopból álló táblázat 500 mezője feketére lett színezve úgy, hogy a színezett mezők sem éllel, sem sarokkal nem szomszédosak egymással, és a bal felső sarok nincs kiszínezve. A táblázat bal felső sarkából indul egy tücsök. Egy lépésben átugorhat egy oldalszomszédos mezőre, de színezett mezőre sosem léphet. Mi az a legkisebb ℓ szám, amire teljesül, hogy a tücsök garantáltan el tud jutni legfeljebb ℓ ugrással az utolsó oszlopba, attól függetlenül, hogy melyik mezők vannak kiszínezve?