

Olimpiai szakkör 2022. szeptember 23.

1. Bizonyítsuk be, hogy n egész között van néhány olyan, melyek összege osztható n -nel.
2. Ha az $1, 2, \dots, 2n$ számok közül választunk $n+1$ -et, akkor egy kiválasztott oszt egy másikat.
3. Ha $(a;b)=1$, akkor létezik x, y egészek, melyekre $ax-by=1$.
4. Egy sakkmester 77 nap alatt legfeljebb 132 partit játszott de minden nap játszott legalább egyet. Biz. van néhány egymás utáni nap, melyek alatt éppen 21 partit játszott.
5. Az $1, 2, \dots, 101$ számokat valamilyen sorrendben felírták. Biz letörölhető 90 úgy, hogy a maradék monoton növő, vagy csökkenő legyen.
6. Mely számoknak van olyan többese, amelyben csak 1 és 2 jegyek vannak?
7. Bizonyítandó, hogy valamely Fibonacci szám legalább 2010 darab 0-ra végződik.
8. Egy 5 m^2 -es szobában van 9 szőnyeg, mindegyik 1 m^2 területű. Biz. van két szőnyeg, melyek legalább $1/9 \text{ m}^2$ területen fedik egymást.
9. Oslo bankja kétféle típusú érmét bocsát ki: alumíniumot (jele A) és bronzot (jele B). Mariann előtt n alumíniumérme és n bronzérme van egy sorban elrendezve valamilyen tetszőleges kezdeti sorrendben. Láncnak nevezzük egymást közvetlenül követő, azonos típusú érmék tetszőleges sorozatát. Rögzített $k \in \mathbb{N}$ pozitív egész szám mellett Mariann ismételten végrehajtja a következő műveletet: meghatározza a leghosszabb olyan láncot, amely tartalmazza a balról számított k -adik érmét, és az ezen lánchoz tartozó összes érmét áteszi a sor bal szélére. Például, ha $n = 4$ és $k = 4$, akkor az AABBBABA elrendezésből kiinduló folyamat: AABBBABA \rightarrow BBBAABA \rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow BBBBAAAA $\rightarrow \dots$. Határozzuk meg mindazon, $1 \leq k \leq n$ tulajdonságú (n, k) párokat, amelyekre minden kiindulási elrendezés esetén lesz olyan pillanat a folyamat során, hogy a balról számított első n érme mind azonos típusú.
10. Legyen ABCDE olyan konvex ötszög, hogy $BC = DE$. Tegyük fel, hogy az ABCDE ötszög belsejében lévő T pontra $TB = TD$, $TC = TE$ és $\angle ABT = \angle T EA$. Messe az AB egyenes a CD és CT egyeneseket a P, illetve Q pontban. Tegyük fel, hogy a P, B, A, Q pontok az egyenesükön ebben a sorrendben helyezkednek el. Messe az AE egyenes a CD és DT egyeneseket az R, illetve S pontban. Tegyük fel, hogy az R, E, A, S pontok az egyenesükön ebben a sorrendben helyezkednek el. Bizonyítandó, hogy a P, S, Q, R pontok egy körön vannak.
11. Mely számoknak van olyan többese, amelynek szomszédos jegyei különböző paritásúak?