Olimpiai szakkör 2021. január 22.

Szeretettel köszöntöm az érdeklődőket az online olimpiai szakkörön. Terveim szerint a szakkör kb két órás lesz, délután 15-17 között. Bátorítani szeretnélek benneteket, készítsetek olyan megoldást, amit a szakkörön bemutattok. Ehhez érdemes készíteni egy rövid leírást, vagy prezentációt. Aki vállalja egy feladat megoldását, kérem keressen meg. Az alábbi hat feladat közül az első a legutóbbi szakköri lapról már ismerős, a többi a decemberi Metropoliszok Olimpiája versenyről való.

Dobos Sándor

1. Legyenek p és q rögzített relatív prím pozitív egészek. A nemnegatív egészek egy S részhalmazát ideális részhalmaznak nevezzük, ha a következő két feltétel egyszerre teljesül: (i) S tartalmazza a 0-t; (ii) ha n S-beli elem, akkor $n+p$ és $n+q$ is az. Határozzuk meg az S ideális részhalmazok számát.
2. Az AB átfogójú derékszögű háromszög AL szögfelezője a CH magasságot K-ban metszi ($L\in CB$). A $BCH\angle$ szögfelezője AB-t M-ben metszi. Igazoljuk, hogy $CK=ML$.
3. Van-e olyan tízes számrendszerben felírt n szám, amelynek minden jegye nagyobb 5-nél, míg n^2 minden jegye kisebb 5-nél?
4. Legyen $n>1$ pozitív egész. A Bergengóc Pénzverde n különböző, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ címletű érmét bocsát ki (a_i pozitív egész, minden címletből nagyon sok készül). A címletek $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ halmazát nevezzük szerencsésnek, ha az $a_1+a_2+\ldots+a_n$ összeg egyetlen módon fizethető ki, minden címletből pont egyet kell választani. (a) Igazoljuk, hogy létezik olyan szerencsés halmaz, amelyre $a_1+a_2+\ldots+a_n<n\cdot 2^n$. (b) Igazoljuk, hogy minden szerencsés halmazra $a_1+a_2+\ldots+a_n> n\cdot 2^{n-1}$.
5. A pozitív a,b,c számokra teljesül, hogy $a^2=b^2+bc$ és $b^2=c^2+ac$. Igazoljuk, hogy $1/c=1/a+1/b$.
6. Tekintsünk egy üres táblázatot 2^{100} sorral és 100 oszloppal. Anna és Bea felváltva kitöltik a táblázat első sorának üres mezőit, Anna kezd. Minden lépésben a soron következő játékos választ egy üres mezőt, ha Anna jön X-et ír bele, ha Bea egy 0-t. Amennyiben már nincs több üres mező az első sorban, akkor jön a második sor, és így tovább. (Minden új sor indításánál éppen Anna következik). A játék akkor ér véget, ha minden mezőt kitöltöttek. Anna célja, hogy a táblázatban minél több, páronként különböző sor legyen, Bea célja, hogy minél kevesebb. Hány különböző sor lesz, ha mindketten a legjobb stratégiával játszanak?