

## Olimpiai szakkör 2020. december 18.

Szeretettel köszöntöm az érdeklődőket az online olimpiai szakkörön. Terveim szerint a szakkör kb két óra lesz, délután 15-17 között. Bátorítani szeretnék benneteket, készítsetek olyan megoldást, amit a szakkörön bemutattok. Ehhez érdemes készíteni egy rövid leírást, vagy prezentációt. Aki vállalja egy feladat megoldását, kérem keressen meg (dobos@fazekas.hu). Az első négy feladat a november 27-i EGMO-IMO válogatóversenyéről való, az ötödik korábbi válogatóverseny feladata. A szakkörön a tervek szerint részt vesznek majd a versenyzőket javító emberek, akik bővebben tudnak majd hozzászólni a példákhoz és a pontozáshoz. A szakkör végén a javítással kapcsolatos kérdéseket is tisztázni lehet majd.

Dobos Sándor

1. Legyenek  $a, b, c$  pozitív egész számok, melyekre  $\frac{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}{2}$  négyzetszám. Bizonyítsd be, hogy  $a=b=c$ .
2. Legyen az  $ABC$  háromszög beírt körének középpontja  $I$ . A kör a  $BC$  és  $AC$  oldalakat rendre a  $D$  és  $E$  pontokban érinti. Legyen a  $BI$  és  $DE$  egyenesek metszéspontja  $G$ . Bizonyítsd be, hogy  $AG$  merőleges  $BG$ -re.
3. Egy szabályos 100-szög 41 csúcsát kékre, a maradék 59 csúcsát pedig pirosra színezzük. Bizonyítsd be, hogy ekkor létezik 24 konvex négyszög  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{24}$ , amiknek a csúcsai a 100-szög csúcsai közül kerülnek ki, továbbá (i) a  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{24}$  négyszögek páronként diszjunktak, és (ii) minden  $Q_i$  négyszögnek pontosan 3 csúcsa egyszínű, a negyedik csúcsa pedig ellenkező színű.
4. Keresd meg az összes  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, amire bármely  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén  
$$f(x-f(y))=f(x)+xf(y)+f(f(y))-1.$$
5. Legyenek  $p$  és  $q$  rögzített relatív prím pozitív egészek. A nemnegatív egészek egy  $S$  részhalmazát ideális részhalmaznak nevezzük, ha a következő két feltétel egyszerre teljesül: (i)  $S$  tartalmazza a 0-t; (ii) ha  $n$   $S$ -beli elem, akkor  $n+p$  és  $n+q$  is az. Határozzuk meg az  $S$  ideális részhalmazok számát.