Olimpiai szakkör 2020. november 6.

Szeretettel köszöntöm az érdeklődőket az online olimpiai szakkörön. Terveim szerint a szakkör kb két órás lesz, délután 15-17 között. Remélem a feladatok pár nappal előbb megérkeznek a regisztrált szakkörösökhöz, így lesz rá idejük, hogy megismerkedjenek a példákkal. Bátorítani szeretnélek benneteket, készítsetek olyan megoldást, amit a szakkörön bemutattok. Ehhez érdemes készíteni egy rövid leírást, vagy prezentációt. Aki vállalja egy feladat megoldását, kérem keressen meg.

A Bergengóc csőpostahálozatot eddig halasztottuk, most szeretném megbeszélni. Ezt követően a szakkörön a szeptemberben lezajlott IMO 3. a friss Kürschák 2. és a nyári CMC verseny 3. példáját vesszük majd át. Ha marad még időnk, akkor következik egy olyan rész, ami a korábbi élő szakköröket jellemezte, azaz a helyszínen kapott példákon gondolkozunk majd, illetve igyekezünk azokra megoldásokat találni. A legutóbbi szakkörön elhangzott az Erdős-Szekeres tétel, ezt érdemes otthon átismételni. Bízom benne, hogy az online szakkör is hasznos és tanulságos lesz, szeretettel várom az érdeklődőket, Dobos Sándor

1. Bergengóciában 2005 város van. Fejletlen a csőpostahálózat, semelyik két várost nem köti össze közvetlen cső. Az új szabályok értelmében kiépíthetnek közvetlen csőkapcsolatot az A és B város között, ha létezik még két további város C és D úgy, hogy nincs közvetlen csőposta sem A és C, sem C és D, sem D és B között. Legfeljebb hány csövet építhetnek ki?
2. Adott $4n$ kavics, amelyeknek a súlya rendre $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Mindegyik kavics n szín közül az egyik színnel van kifestve; mindegyik színből négy kavics van. Mutassuk meg, hogy a kavicsokat el lehet rendezni két kupacba úgy, hogy mindkét alábbi feltétel teljesüljön: (i) A két kupac összsúlya azonos. (ii) Mindegyik kupac minden színből két kavicsot tartalmaz. (IMO 2020/3.)
3. Határozzuk meg azokat a racionális számok halmazán értelmezett, nemnegatív valós értékű f függvényeket, melyekre teljesül, hogy tetszőleges x, y racionális számokra: (i) $f(x + y) \le f(x) + f(y)$; (ii) $f(xy) = f(x)f(y)$; (iii) $f(2) = 1/2$. (Kürschák 2020/2.)
4. Legyen ABC olyan háromszög, amelyre $AB > BC$, és legyen D a BC szakasznak egy változó belső pontja. Legyen E az a pont az ABC háromszög körülírt körén, a BC-nek A-val ellentétes oldalán, amelyre $\angle BAE = \angle DAC$. Legyen I az ABD háromszög beírt körének középpontja, és legyen J az ACE háromszög beírt körének középpontja. Bizonyítandó, hogy az IJ egyenes átmegy egy rögzített ponton, amely független D-től. (CMC 2020/3.)