

4. Válogatóverseny

2022. április 23.

4. Feladat

Legyen n rögzített pozitív egész szám. Legyen S a síkbeli derékszögű koordinátarendszer azon $(x; y)$ pontjainak halmaza, amelyekre x és y is $2n$ -nél kisebb nemnegatív egész (tehát $|S| = 4n^2$). Tegyük fel, hogy \mathcal{F} négyszögek olyan halmaza, amelyre $|\mathcal{F}| = n^2$, és az \mathcal{F} -beli négyszögek csúcsainak halmaza éppen az S ponthalmaz. Legfeljebb mennyi lehet az \mathcal{F} -beli n^2 darab négyszög területének összege?

5. Feladat

Anna kap egy $r > 1$ racionális számot és egy egyenest, amelyen két különböző pont P és Z . A P ponton egy piros, a Z ponton egy zöld gyöngy van. Anna egyedül játszik, lépések egy sorozatát hajtja végre. Minden lépésben kiválaszt egy k egész számot (ez nem feltétlenül pozitív), továbbá valamelyik gyöngyöt. Ha ez a gyöngy az X pontban van és a másik az Y -ban, akkor a választott gyöngy átkerül X -ből arra az X' pontra, amelyre $\overrightarrow{YX'} = r^k \overrightarrow{YX}$. Anna célja, hogy a piros gyöngy a P pontból eljusson a Z pontba. Határozzuk meg mindazokat az $r > 1$ racionális számokat, amelyekre Anna elérheti célját legfeljebb 2021 lépésben.

6. Feladat

Egy végtelen négyzethálón játszik Rejtőzködő és Nyomozó. A játék kezdetén Nyomozó választ véges sok szint, majd a négyzetháló mindegyik egységnégyzetét ezek valamelyikével kiszínezi. Ezt követően Rejtőzködő kiválasztja a háló egy egységnégyzetét, ez lesz a startmezője. Rejtőzködő megmondja a startmező színét, majd mozogni kezd: mindig egy szomszédos mezőre lép, ahol még nem járt. (Két mező akkor szomszédos, ha van közös élük.) Amikor új mezőre lép, bemondja annak színét. Nyomozó nyer, ha véges sok lépés után Rejtőzködő nem tud lépni, vagy Nyomozó ki tudja találni Rejtőzködő startmezőjét. Van-e Nyomozónak nyerő stratégiája?

Munkaidő: 4 óra 30 perc.

Mindegyik feladat 7 pontot ér.

Az IMO szabályai szerint ezt a feladatsort a 2022-es IMO utolsó napjáig, 2022. július 16-ig nem szabad nyilvánossá tenni, az interneten megosztani.