3. Válogatóverseny

2022. április 22.

1. Feladat

Egy n csúcsú irányított gráfban bármely két csúcs között van pontosan egy irányított él. Az X csúcsból az Y csúcsba vezető *út*on irányított élek olyan sorozatát értjük, amellyel eljuthatunk X-ből Y-ba úgy, hogy sohasem térünk vissza olyan csúcsba, ahol már voltunk. Néhány utat nevezzünk *éldiszjunkt*nak, ha közülük semelyik kettőnek sincs közös éle.

Legyen A és B két különböző csúcs. Jelölje N_{AB} az A-ból B-be vezető éldiszjunkt utak számának maximumát. Hasonlóan definiáljuk N_{BA}-t. Bizonyítsuk be, hogy $N_{AB} = N_{BA}$ akkor és csak akkor teljesül, ha az A-ból kifutó élek száma megegyezik a B-ből kifutó élek számával.

2. Feladat

Az $ABCD$ húrnégyszög köré írt kör legyen Ω. Az Ω kör D-beli érintője a B kezdőpontú BA és BC félegyeneseket E-ben és F-ben metszi. Az ABC háromszög belsejében lévő T pontra $TE||CD$ és $TF||AD$. Legyen $K \neq D$ a DF szakasz olyan pontja, amelyre $TD = TK$. Bizonyítsuk be, hogy az AC, DT és BK egyenesek egy ponton mennek át.

3. Feladat

Legyen $n \geq 2$ egész. Legyenek a_1, a_2, ..., a_n olyan pozitív valós számok, amelyekre

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 1.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k}(a_1 + a_2 + ... + a_{k-1})^2 < \frac{1}{3}.$$

Munkaidő: 4 óra 30 perc.

Mindegyik feladat 7 pontot ér.