

2021. november 19., péntek

1. Melyek azok az  $a, b, c$  pozitív egész számok, amelyek teljesítik az

$$a^a \cdot b^b = c^{a+b}$$

egyenletet?

2. Az  $ABC$  hegyesszögű háromszögben legyen az  $AB$  szakasz felezőmerőlegesének és a  $BC$  egyenesnek a metszéspontja  $D$ . Az  $AC$  szakasz felezőmerőlegesének és az  $ABC$  háromszög köréírt körét az  $A$  pontban érintő egyenesnek a metszéspontja legyen  $E$ . Bizonyítsd be, hogy a  $DE$  egyenes párhuzamos az  $AB$  egyenessel.

3. a) Adott egy  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  függvény, melyre

$$|x - y| < |f(x) - f(y)|$$

teljesül bármely  $x, y$  különböző egész számok esetén. Bizonyítsd be, hogy léteznek olyan  $k$  pozitív, és  $n$  tetszőleges egész számok, melyekre

$$|f^k(x)| > 2021$$

teljesül minden  $x \in \mathbb{Z}, x \neq n$  esetén.

- b) Legyen  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  függvény, melyre

$$|x - y| < |f(x) - f(y)|$$

teljesül bármely  $x, y$  különböző racionális számok esetén. Igaz-e, hogy ekkor szükségképpen létezik olyan  $k$  egész és  $q$  racionális szám, melyekre

$$|f^k(x)| > 2021$$

teljesül minden  $x \in \mathbb{Q}, x \neq q$  esetén?

$\mathbb{Z}$  az egész számok halmazát,  $\mathbb{Q}$  pedig a racionális számok halmazát jelöli.

$f^k$  azt jelenti, hogy  $k$ -szor alkalmazzuk egymás után az  $f$  függvényt. Például ha  $f(x) = x^2 + 1$ , akkor  $f^2(x) = f(f(x)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 + 1$ .

4. Legyenek  $n$  és  $k$  rögzített pozitív egész számok, melyekre  $n \geq k$ . Béla egy kétoldalas nyomtatóval valahány lapra ki szeretné nyomtatni édesanyja 50. születésnapjára az  $n$  db kedvenc közös fényképet. Ezt úgy szeretné megtenni, hogy bármely  $k$  db fényképet kiválasztva létezzen  $k$  db lap úgy, hogy ezen lapok oldalai közül egyet-egyét választva az így kapott  $k$  db oldalon éppen a kiválasztott  $k$  db fénykép szerepeljen. Legkevesebb hány lapra lesz ehhez szüksége Bélának?

Béla minden lapnak mindkét oldalára csak egy-egy fényképet nyomtathat, és bármely két fényképet nyomtathatja ugyanannak a lapnak a két oldalára.