4. Válogatóverseny

2021. május 26.

1. Feladat

Minden p prímre van egy királyság, p-ország, amely p darab szigetből áll az 1, 2, ..., p számokkal megszámozva. Az n és m $(n \neq m)$ számú szigetek között pontosan akkor van híd, ha p osztja az $(n^2 - m + 1)(m^2 - n + 1)$ kifejezést. A hidak egymás felett átívelhetnek, de nem keresztezhetik egymást. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan p van, amelyre található két sziget P-országban, melyek nincsenek összekötve hidak láncolatával.

2. Feladat

Az $ABCD$ húrnégyszög oldalai között nincs két párhuzamos. Legyenek K, L, M, N rendre az AB, BC, CD, DA oldalakon úgy, hogy $KLMN$ rombusz, $KL \parallel AC$ és $LM \parallel BD$. Legyenek ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 rendre az ANK, BKL, CLM, DMN háromszögek beírt körei. Igazoljuk, hogy ω_1 és ω_3 közös belső érintői valamint ω_2 és ω_4 közös belső érintői mind egy ponton mennek át.

3. Feladat

Legyenek n és k pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy $a_1, ..., a_n \in [1; 2^k]$ esetén

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + ... + a_i^2}} \leq 4\sqrt{kn}.$$

Munkaidő: 4 óra 30 perc.

Mindegyik feladat 7 pontot ér.

Az IMO sazabályai szerint ezt a feladatsort a 2021-es IMO utolsó napjáig, 2021. július 24-ig nem szabad nyilvánossá tenni, az interneten megosztani.