

Olimpiai szakkör 2026. március 20.

A legutóbbi szakkörökről maradt: (i.) Bizonyítsuk be, 2023 darab különböző pozitív egészre teljesül, hogy az ötödik és hetedik hatványaiknak összege nagyobb egyenlő, mint kétszer a köbeik összegének a négyzete.

Mikor lesz egyenlőség?

(ii.) Milyen m egész esetén van olyan irracionális x , amire $x^{12} + mx$, $x^3 + 2x^2$ és $x^2 + x$ mindegyike egész.

1. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 + y^2 + z^2 = (x-y)(y-z)(z-x)$ egyenletnek végtelen sok megoldása van az egész számok körében.

2. Hét darab egytől hétig megszámozott érmét egy véletlen permutációban elhelyezünk egymás mellett egy sorban. Célunk, hogy felszedjük őket növekvő sorrendben néhány lépésben, azaz először az egyest vesszük fel, legutoljára pedig a hetest. Amennyiben egy éppen felvett érmén a k szám van és a kiindulási sorrendben tőle jobbra közvetlenül a $k+1$ következik, akkor ugyanebben a lépésben a $k+1$ is felvehető. Példaként megadunk két sorrendet. A (3425671)-et négy lépésben tudjuk felszedni: (1), (2), (34), (567). Az (1234567) egyetlen lépésben felvehető. (a) Mennyi a valószínűsége, hogy három lépésben tudjuk felszedni a hét érmét? (b) Mennyi a valószínűsége, hogy hét lépésben tudjuk felszedni a hét érmét? (c) Mennyi a felszedéshez szükséges lépések számának a várható értéke?

3. Az ABC háromszög A -ból induló szögfelezője a BC oldalt D -ben metszi. Az ABD háromszög beírt köre az AB oldalt E -ben, az ADC háromszög beírt köre az AC oldalt H -ban érinti. Igazoljuk, hogy az EH egyenes az említett két körből egyenlő hosszúságú húrokat metsz ki.

4. Hány S részhalmaza van a $H = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ halmaznak, amelyre S minden elemének valamely szomszédja is S -beli? (Meg kell számolnunk az üres halmazt és magát a H halmazt is.)

5. Az $ABCD$ négyzet AB illetve AD oldalán levő P és Q pontokra teljesül, hogy $AP \cdot AQ = 2 \cdot BP \cdot DQ$. A CP szakasz az R , a CQ szakasz az S pontban metszi a BD átlót. Igazoljuk, hogy az $APRSQ$ ötszög csúcsai egy körön vannak.

6. Az f függvény értelmezési tartománya a nemnegatív egész számok, a függvény minden értéke valós szám. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amelyre teljesül, hogy $f(1)=1$ és bármely $m \geq n$ nemnegatív egész számok esetén $f(m+n)+f(m-n)=1/2 \cdot (f(2m)+f(2n))$.