

Olimpiai szakkör 2026. február 27.

A legutóbbi szakköről maradt: (i) Az $XYZV$ téglalap XY oldalán van 7 különböző pont, A, B, C, D, E, F és G ebben a sorrendben. A szemközti ZV oldalon is van 7 különböző pont ezeket valamilyen sorrendben az $1, 2, \dots, 7$ számok jelölik. Összekötjük az A -t és az 1-es pontot, a B -t és a 2-es pontot, ..., a G -t és a 7-es pontot kékkel. Így 7 kék szakaszt kaptunk, amelyek a téglalap szemközti oldalai között futnak. (a) Hány olyan sorrendje van a számozott pontoknak, amikor minden kék szakaszt ugyanannyi másik kék szakasz metszi? (b) Tegyük fel, hogy a pontok elhelyezkedése olyan, hogy három kék szakasz nem metszi egymást ugyanabban a pontban. Hány olyan sorrendje van a számozott pontoknak, amikor a kék szakaszoknak összesen 7 metszéspontja van?

(ii.) Bizonyítsuk be, 2023 darab különböző pozitív egészre teljesül, hogy az ötödik és hetedik hatványaiknak összege nagyobb egyenlő, mint kétszer a köbeik összegének a négyzete. Határozzuk meg, mikor lesz egyenlőség.

1. Határozzuk meg az összes olyan prímszámot, amely előáll $[n^2 \setminus 5]$ alakban, ahol n pozitív egész számot jelöl.
2. A hegyesszögű ABC háromszögben $AB \neq CB$, az AC oldal felezőpontja F . Legyen a B -ből induló magasságvonal talppontja az AC oldalon T , az A és C pontok merőleges vetülete a háromszög B csúcsából induló belső szögfelezőjének egyenesén pedig rendre P és Q . (a) Bizonyítsuk be, hogy P, Q, F és T egy k körön helyezkednek el. (b) Legyen R az ABC köré írt kör sugara, r pedig k kör sugara. Határozzuk meg az ABC háromszög legnagyobb és legkisebb szögének arányát, ha $\beta = 72^\circ$ és $R:r = 2:1$.
3. Egy hat pontú teljes gráf minden élét három szín (piros, kék, zöld) valamelyikével színezzük. Tekintsük először a hat pontot és csak a piros éleket. Ezen gráf legtöbb pontot tartalmazó komponensében, azaz összefüggő részében, a pontok számát jelölje p . Hasonlóan kapjuk a k és z számokat a másik két színt tekintve. Például, ha a csúcsok A, B, C, D, E, F és minden A -ból induló él piros, a BC és DE él kék, a többi pedig zöld, akkor $p = 6, k = 2, z = 5$. (a) Lehet-e, hogy $p = k = z = 6$? (b) Keressünk olyan színezést, amelyre $M = \max(p, k, z)$ a lehető legkisebb.
4. Legyen n pozitív egész. Vegyünk $2n$ darab különböző prímszámot, jelölje szorzatukat L . Tekintsük azon pozitív egész $a < b$ számokat, amelyekre a osztója b -nek és b osztója L -nek. Igazoljuk, hogy ezen (a, b) párok száma 5-tel osztható.
5. Milyen m egész esetén van olyan irracionális x , amire $x^{12} + mx, x^3 + 2x^2$ és $x^2 + x$ mindegyike egész.