

Olimpiai szakkör 2026. február 13.

A legutóbbi szakköről maradt: Legyen n pozitív egész. Skandináv négyzet egy $n \times n$ méretű tábla, amely 1-től n^2 -ig az összes egész számot tartalmazza úgy, hogy minden mezőben pontosan egy szám áll. Két különböző mezőt szomszédosnak tekintünk, ha van közös oldaluk. Ha egy mezőnek minden szomszédjában nagyobb szám áll, mint öbénne, akkor völgynek nevezzük. Kaptató egy sorozat, amely egy vagy több mezőből áll úgy, hogy

(i) a sorozat első mezője egy völgy; (ii) a sorozat minden további mezője szomszédos az öt közvetlenül megelőző mezővel, továbbá (iii) a sorozat mezőiben álló számok növekvő sorrendben vannak.

Adott n esetén határozzuk meg egy skandináv négyzetben lévő kaptatók számának legkisebb lehetséges értékét.

1. Az x, y, z, t valós számok mindegyike eleme a $[0; 2]$ intervallumnak. Igazoljuk, hogy

$$x(2 - t) + y(2 - x) + z(2 - y) + t(2 - z) \leq 8.$$

2. Tekintsünk egy körbe írt ABCDEF konvex hatszöget. Igazoljuk, hogy az AD, BE és CF átlók akkor és csak akkor illeszkednek egy pontra, ha $(AB/BC) \cdot (CD/DE) \cdot (EF/FA) = 1$.

3. Melyik az a legnagyobb x egész szám, amelyre $4^{17} + 4^{1020} + 4^x$ négyzetszám?

4. Igazoljuk, hogy végtelen sok pozitív egész $(a; b; c)$ számhármásra teljesül, hogy $\binom{a}{2} + \binom{b}{2} = \binom{c}{2}$. Igaz-e, hogy végtelen sok olyan számhármásra is teljesül, ahol $a \leq b \leq c \leq 2a$?

5. Az XY ZV téglalap XY oldalán van 7 különböző pont, A, B, C, D, E, F és G ebben a sorrendben. A szemközti ZV oldalon is van 7 különböző pont ezeket valamilyen sorrendben az 1, 2, ..., 7 számok jelölik. Összekötjük az A-t és az 1-es pontot, a B-t és a 2-es pontot, ..., a G-t és a 7-es pontot kékkel. Így 7 kék szakaszt kaptunk, amelyek a téglalap szemközti oldalai között futnak. (a) Hány olyan sorrendje van a számozott pontoknak, amikor minden kék szakaszt ugyanannyi másik kék szakasz metszi? (b) Tegyük fel, hogy a pontok elhelyezkedése olyan, hogy három kék szakasz nem metszi egymást ugyanabban a pontban. Hány olyan sorrendje van a számozott pontoknak, amikor a kék szakaszoknak összesen 7 metszéspontja van?

6. Bizonyítsuk be, 2023 darab különböző pozitív egészre teljesül, hogy az ötödik és hetedik hatványaiknak összege nagyobb egyenlő, mint kétszer a köbeik összegének a négyzete. Határozzuk meg, mikor lesz egyenlőség.