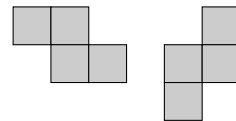
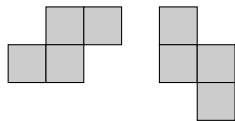


Olimpiai felkészítő feladatok 2026. február 13-ra

- Tegyük fel, hogy a G irányított gráfban $P_1, P_2, \dots, P_k$ olyan irányított utak, amelyeknek nincs közös csúcsa. Tegyük fel továbbá, hogy $Q_1, Q_2, \dots, Q_\ell$ is olyan irányított utak G -ben, amelyeknek nincs közös csúcsa. Mutassuk meg, hogy léteznek G -ben olyan $R_1, R_2, \dots, R_m$ irányított utak, amelyeknek nincs közös csúcsa, és ezen utak $\mathcal{R}$ halmazára az alábbi feltételek teljesülnek.
 - Minden P_i út kezdőpontjából indul $\mathcal{R}$ -beli út.
 - Minden $\mathcal{R}$ -beli út valamely P_i vagy Q_j út kezdőpontjából indul.
 - Minden Q_j út utolsó csúcsában végződik $\mathcal{R}$ -beli út.
 - Minden $\mathcal{R}$ -beli út valamely P_i vagy Q_j út utolsó csúcsában végződik.
 - Minden $\mathcal{R}$ -beli út valamely egy P_i út (esetleg üres) kezdőszeletének és egy Q_j út (esetleg üres) végszeletének összefűzésével keletkezik.
- Tegyük fel, hogy az $f : 2^X \rightarrow 2^X$ függvény *monoton*, azaz $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Bizonyítsuk be, hogy f -nek van fixpontja, azaz olyan $A \subseteq X$ részhalmaz, amire $f(A) = A$. Igazoljuk azt is, hogy ha $f(A) = A$ és $f(B) = B$, akkor van olyan $C \subseteq A \cap B$ részhalmaz, amire $f(C) = C$.
- Bizonyítandó, hogy a sík rácspontjainak tetszőleges véges H halmazából kiválasztható olyan K részhalmaz, melyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:
 - a sík bármely tengelypárhuzamos (azaz függőleges vagy vízszintes) egyenese K -t legfeljebb 2 pontban metszi,
 - $H \setminus K$ bármely pontja rajta van egy K -beli végpontokkal rendelkező, tengelypárhuzamos szakaszon.
- Egy országban a városok közötti közlekedés vonaton és busszal lehetséges. A vasúttársaság és a buszvállalat is bizonyos várospárok között közlekedtet járatokat, ám két város között nem feltétlenül jár mindkét irányba járat. Tudjuk, hogy bárhogyan is választunk ki két várost, el lehet jutni egy fajta közlekedési eszközön (esetleges átszállásokkal) az egyikből a másikba (de a másikból az egyikbe már nem feltétlenül). Bizonyítsuk be, hogy van olyan város, amelyből bármely másik város elérhető egyféle közlekedési eszközzel úgy, hogy a különböző városokba jutás eszköze más-más lehet.
- Bizonyítsuk be, hogy pozitív egész számok tetszőleges véges A halmazának van olyan B részhalmaza, amelyre fennáll az alábbi két feltétel.
 - Ha b_1 és b_2 a B különböző elemei, akkor sem b_1 és b_2 , sem pedig $b_1 + 1$ és $b_2 + 1$ nem egymás többszörösei, továbbá
 - az A halmaz tetszőleges a eleméhez van B -nek olyan b eleme, amelyre a osztója b -nek vagy $(b + 1)$ osztója $(a + 1)$ -nek.
- Tegyük fel, hogy egy síkbeli P alakzat kiparkettázható az alábbi ábra bal oldalán látható kétféle S csempe eltoltjaival. Bizonyítsuk be, hogy ha P kiparkettázásához az iménti S csempék mellett az ábra jobb oldalán látható kétféle Z csempe eltoltjait is felhasználtuk, akkor ez a parkettázás páros sok Z csempét tartalmaz.



- Piréziát a téli olimpián 10 fiú és 10 lány képviseli. Az esemény megnyitóján mindegyiküknek egy-egy színes sapkát kell viselnie, amit az általa kapott három különböző színű sapkából választhat ki. (Az egyes versenyzők nem feltétlenül kaptak ugyanolyan színű sapkákat.) Kiöltözhet-e a piréz csapat a megnyitóra úgy, hogy ne legyen olyan piréz fiú és lány, akik egyforma színű sapkát viselnek?

8. Miután Piréziában enyhítették a kijárási korlátozást, kötelezővé tették a maszkviselést. Mivel ebben sem szeretnék az egyébként rendkívül fegyelmezett polgárokat feleslegesen korlátozni, mindenki szabadon eldöntheti, hogy narancssárga vagy nemzetiszínű maszkot kíván-e viselni. A piréz amellet, hogy rendszerető, szorgos és alkalmazkodó nép, néhány további sajátos vonással rendelkezik. Például aktív a facebookon: minden piréz minden reggel feltölt magáról egy szelfit és délután megnézi az összes ismerősének az aznap feltöltött képét. Természetesen minden piréz minden nap olyan színű maszkot hord, mint amilyet a facebook-ismerősei többsége az előző napon viselt. (Különös módon minden piréznek páratlan számú piréz facebook-ismerőse van.)

Bizonyítsuk be, hogy előbb-utóbb lesz olyan nap, amikor minden piréz a két nappal azelőtti maszkjával azonos színű maszkban lesz.

(Közismert, hogy Piréziában facebook-ismeretséget nem lehet megszüntetni.)

9. Az 1988-ban Canberrában szervezett IMO-n 49 ország vett részt. Erre a versenyre javasolták a következő feladatot.

Tegyük fel, hogy egy versenyen 49 versenyző indul, és mindegyiküknek ugyanazt a három feladatot kell megoldania. Minden feladat megoldását 0 és 7 közötti egész pontszámmal értékeli. Igazoljuk, hogy szükségképpen létezik két olyan versenyző, akik közül az egyik mindhárom feladat esetében legalább annyi pontot szerzett, mint a másik.

10. Egy kocka élein mozog egy légy és három pók; a pókok célja a légy elfogása. Mindegyikük pontosan látja a többiek pillanatnyi helyzetét, ám a légy háromszor gyorsabban mozog, mint a pókok. Képesek-e a pókok előre megállapodni olyan stratégiában, amely garantálja, hogy a legyet annak kezdeti helyzetétől és azt követő mozgásától függetlenül előbb-utóbb biztosan elfogják?

11. Adott a síkon n pont úgy, hogy a közöttük fellépő $\binom{n}{2}$ távolság mind különböző. Két játékos játszik a következő szabályok szerint: az első játékos kijelöli az n pont egyikét, majd a második egy ettől különböző pontot választ. Ezután felváltva lépnek, az első játékos kezd.

Minden lépés során a soron következő játékos a két kijelölt pont egyikét egy másik pontra cserélheti úgy, hogy a kijelölt pontpár távolsága szigorúan csökkenjen. Az a játékos veszít, aki nem tud szabályos lépést tenni.

Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?