

Olimpiai szakkör 2026. január 30.

A legutóbbi szakköről maradt: Egy nagy téglalapot kisebb téglalapokra vágunk, melyeknek legalább egyik oldala egész hosszúságú. Biz. a nagy téglalap legalább egyik oldala egész hosszú.

1. A koordináta rendszer $O(0; 0)$ origójából elmegyünk az $A(5; 2)$ pontba 11 lépéssel. Minden lépésben 1 egységet haladunk valamelyik tengellyel párhuzamosan. Utunk során egy ponton akár többször is átmehetünk. A lehetséges útvonalak hányad része halad át a $B(3; 3)$ ponton?
2. Oldja meg a következő egyenletrendszert a pozitív egész számok halmazán:
$$x^2 + 2xy + 8z = 4z^2 + 4y + 8; \quad x^2 + y + 2z = 64;$$
3. Egy körvonal négy különböző pontban metszi az $y = 1/x$ egyenletű görbe grafikonját. Jelölje a metszéspontokat $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$ és $P_4(x_4; y_4)$. Bizonyítsuk be, hogy $x_1x_2 = y_3y_4$.
4. Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja legyen D . Az AB és AC oldalak B -hez, illetve C -hez közelebbi harmadoló pontjai legyenek rendre E és F . Az ABD köré írt kört a DE egyenes másodszor G -ben metszi. Az ACD köré írt kört a DF egyenes másodszor H -ban metszi. Igazoljuk, hogy $GEFH$ húrnégyszög.
5. Legyen $ABCDE$ olyan konvex ötszög, hogy $BC = DE$. Tegyük fel, hogy az $ABCDE$ ötszög belsejében lévő T pontra $TB = TD$, $TC = TE$ és $\angle ABT = \angle TEA$. Messe az AB egyenes a CD és CT egyeneseket a P , illetve Q pontban. Tegyük fel, hogy a P, B, A, Q pontok az egyenesükön ebben a sorrendben helyezkednek el. Messe az AE egyenes a CD és DT egyeneseket az R , illetve S pontban. Tegyük fel, hogy az R, E, A, S pontok az egyenesükön ebben a sorrendben helyezkednek el. Bizonyítandó, hogy a P, S, Q, R pontok egy körön vannak.
6. Legyen n pozitív egész. Skandináv négyzet egy $n \times n$ méretű tábla, amely 1-től n^2 -ig az összes egész számot tartalmazza úgy, hogy minden mezőben pontosan egy szám áll. Két különböző mezőt szomszédosnak tekintünk, ha van közös oldaluk. Ha egy mezőnek minden szomszédjában nagyobb szám áll, mint őbenne, akkor völgynek nevezzük. Kaptató egy sorozat, amely egy vagy több mezőből áll úgy, hogy (i) a sorozat első mezője egy völgy; (ii) a sorozat minden további mezője szomszédos az őt közvetlenül megelőző mezővel, továbbá (iii) a sorozat mezőiben álló számok növekvő sorrendben vannak. Adott n esetén határozzuk meg egy skandináv négyzetben lévő kaptatók számának legkisebb lehetséges értékét.