

IMO aspiráns szakkör, 2026. jan. 30.

"Lifting The Exponent lemma" (LTE):

p prímszám, a, b nem osztható p -vel, $a - b$ nem nulla és osztható p -vel, n pozitív egész, és $v_p(k)$ jelöli a p kitevőjét a k prímtényezős felbontásában.

- Ha $p \geq 3$, akkor

$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n).$$

- Ha $p = 2$, és n páros, akkor

$$v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b) + v_2(a + b) + v_2(n) - 1.$$

Páratlan n esetén összeggel is írhatjuk (a b helyére $(-b)$ -t helyettesítünk): ha a, b nem osztható p -vel, $a + b$ nem nulla és osztható p -vel, akkor

$$v_p(a^n + b^n) = v_p(a + b) + v_p(n).$$

A legtöbb esetben $b = \pm 1$, és az $a^n \mp 1$ prímfelbontását vizsgáljuk.

Feladatok

Próbáljuk megoldani az LTE nélkül (szorzattá alakítással vagy a multiplikatív rend és a kitevő legkisebb prímosztójának vizsgálatával) és LTE-vel is.

1. Bizonyítsuk be, hogy $2^{3^n} + 1$ minden n természetes számra osztható 3^{n+1} -nel. (KöMaL B. 3908.)
2. Legyen n nemnegatív egész szám. Határozzuk meg a 7 kitevőjét a $3^{7^n} + 4^{7^n}$ prímtényezős alakjában. (KöMaL B. 4744.)
3. $v_3(2^n + 1) = ?$
4. Igazoljuk, hogy nincs olyan $n > 1$, amelyre $n \mid 2^n - 1$.
5. Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ és $n \mid 6^n - 1$, akkor $5 \mid n$.
6. (a) Konstruáljunk végtelen sok olyan n -et, amelyre $n \mid 6^n - 1$.
(b) Konstruáljunk végtelen sok olyan n -et, amelyre $n \mid 6^n - 1$, és n nem 5 -hatvány.
7. Find all triples (p, x, y) consisting of a prime number p and two positive integers x and y such that $x^{p-1} + y$ and $x + y^{p-1}$ are both powers of p . (IMO Shortlist, 2014/N5)
8. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében a következő egyenletet: $n! = 2^a - 2^b$. (KöMaL B. 4839.)
9. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész n -et, amelyre $\frac{2^n + 1}{n^2}$ egész szám. (IMO 1990/3)
10. Mi az LTE Fibonacci számokra vonatkozó megfelelője?