

IMO aspiráns szakkör, 2026. jan. 9.

A következő szakkörön megbeszéljük:

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egészre teljesül, hogy

$$(n!)^n \mid n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 2) \cdot \dots \cdot (n + 2) \cdot (n + 1).$$

B. 5481., Hujter B.

2. Prove that $(2m)!(2n)!$ is a multiple of $m!n!(m+n)!$ for any non-negative integers m and n .

IMO 1972/3

3. (a) Mutassuk meg, hogy Bármely a, b pozitív egészekhez van olyan p prím szám és k pozitív egész, amelyre

$$\left\{ \frac{a}{p^k} \right\} + \left\{ \frac{b}{p^k} \right\} = \left\{ \frac{a+b}{p^k} \right\} + 1.$$

(b) For every real number x , let $\|x\|$ denote the distance between x and the nearest integer. Prove that for every pair (a, b) of positive integers there exist an odd prime p and a positive integer k satisfying

$$\left\| \frac{a}{p^k} \right\| + \left\| \frac{b}{p^k} \right\| + \left\| \frac{a+b}{p^k} \right\| = 1.$$

IMO Shortlist 20214/N8

4. Show that there exists a real $C > 1$ that satisfy the following property: if $n > 1$ and $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ are positive integers such that $\frac{1}{a_0}, \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$ are in arithmetic progression, then $a_0 > C^n$.

CIIM 20215/6

5. Legyen $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ pozitív egészekből álló számtani sorozat. Mutassuk meg, hogy

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] \geq [1, 2, \dots, n].$$

A [...] szimbólum a legkisebb közös többszöröst jelöli.)

KöMaL A. 664.