

Polinomok

Lenger Dániel (leda1648@fazekas.hu)

Junior Téli Tábor, 2025. december 27-31.

1. Pár hasznos segédállítás

1. Legyen $P(x)$ egész együtthatós polinom, a és b pedig különböző egész számok. Bizonyítsd be, hogy

$$a - b \mid P(a) - P(b).$$

2. **(Racionális gyökteszt.)** Legyen $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom, és $\frac{p}{q}$ egy racionális gyöke, ahol p, q egész számok, és $(p, q) = 1$. Igazold, hogy $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.

3. **(Polinomosztás.)**

- (a) Adott egy $P(x)$ és egy $Q(x)$ valós (vagy komplex) együtthatós polinom úgy, hogy $\deg(P) > \deg(Q)$. Bizonyítsd be, hogy ekkor létezik egyértelműen egy $R(x)$ és $S(x)$ valós (vagy komplex) együtthatós polinom, melyekre

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) + S(x),$$

és $\deg(S) < \deg(Q)$.

- (b) Mutasd meg, hogy ez egész együtthatós polinomokra is működik, amennyiben $Q(x)$ főegyütthatója 1.

4. **(Kis Bézout-tétel.)** Legyen a $P(x)$ komplex(/valós/egész) együtthatós polinomnak az a egy komplex(/valós/egész) gyöke. Bizonyítsd be, hogy ekkor "ki lehet emelni a gyököt", azaz létezik egy $Q(x)$ komplex(/valós/egész) együtthatós polinom, hogy $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$.
5. Egy n -edfokú komplex(/valós/egész) együtthatós polinomnak legfeljebb n darab különböző komplex(/valós/egész) gyöke van.
6. *A következő két állítást nem bizonyítjuk, de felhasználhatjuk.*

- (a) Egy n -edfokú komplex(/valós/egész) együtthatós polinomnak a gyökeit multiplicitással számolva is legfeljebb n darab komplex(/valós/egész) gyöke lehet.
- (b) **(Az algebra alaptétele.)** Egy n -edfokú komplex(/valós/egész) együtthatós polinomnak multiplicitással számolva **pontosan** n darab komplex gyöke van, azaz egy

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

polinomhoz mindig lehet találni $z_1, z_2, \dots, z_n$ komplex számokat úgy, hogy

$$p(x) = a_n (x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n).$$

7. **(Viète-formulák, avagy gyökök és együtthatók közötti összefüggések.)** Ha egy n -edfokú komplex(/valós/egész) együtthatós polinom minden gyökét kiemeltük, akkor kétféle alakban is fel tudjuk írni:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Ekkor a két oldalon az azonos fokú tagok együtthatói meg kell, hogy egyezzenek. Például $a_{n-1} = -a_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, vagy $a_0 = (-1)^n a_n(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)$. Átrendezéssel kapható így több (összesen n darab) összefüggés is a gyökök és az együtthatók között, például:

- $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

2. Feladatok

8. Legyen $P(x)$ egy olyan n -edfokú valós együtthatós polinom, melyre $k = 1, 2, \dots, n+1$ esetén

$$P(k) = \frac{1}{k}.$$

Határozd meg $P(n+2)$ értékét.

9. Határozd meg az összes olyan $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomot, aminek a gyökei épp a, b, c .
10. Jelölje egy $A = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ végtelen hosszú sorozatra $\Delta(A) = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots)$ a differencia-sorozatot. Tudjuk, hogy egy adott A sorozatra $\Delta(\Delta(A))$ a konstans 1 sorozat. Továbbá tudjuk, hogy $a_{20} = a_{26} = 0$. Mennyi a_1 ?
11. A következő 4 feladat egymásra épül, így sorban érdemes foglalkozni velük.

- (a) Legyen $P(x)$ egy egész együtthatós polinom, és a, b, c három különböző egész szám. Mutasd meg, hogy nem teljesülhet egyszerre, hogy $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$.
- (b) Legyen $P(x)$ egy egész együtthatós polinom, és n egy páratlan pozitív egész szám. Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n$ olyan egész számok, hogy

$$P(x_1) = x_2, P(x_2) = x_3, P(x_3) = x_4, \dots, P(x_{n-1}) = x_n, P(x_n) = x_1.$$

Bizonyítsd be, hogy $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

- (c) Legyen $P(x)$ egy egész együtthatós polinom, és legyenek $x_0, x_1, x_2, \dots$ olyan egész számok, hogy $x_0 = 0$, és minden $n \geq 1$ esetén $P(x_{n-1}) = x_n$. Tegyük fel, hogy valamilyen $k > 0$ esetén $x_k = 0$. Bizonyítsd be, hogy ekkor $x_1 = 0$ vagy $x_2 = 0$ is teljesül.
- (d) * Legyen $P(x)$ egy n -edfokú egész együtthatós polinom, és k egy pozitív egész szám. Legyen

$$Q(x) = \underbrace{P(P(\dots P(x) \dots))}_{k \text{ db}}.$$

Igazold, hogy legfeljebb n darab olyan t valós szám lehet, melyre $Q(t) = t$.

12. Legyenek a, b, c, d, e, f pozitív egész számok úgy, hogy $S = a + b + c + d + e + f$ osztja $abc + def$ és $ab + bc + ca - de - ef - fd$ számokat is. Bizonyítsd be, hogy S összetett szám.
13. Legyen k egy pozitív egész szám. Tegyük fel, hogy az alábbi szorzattábtartás elvégezhető:

$$1 + x^k + x^{2k} = (1 + a_1x + x^2) \cdot (1 + a_2x + x^2) \cdot \dots \cdot (1 + a_kx + x^2).$$

Határozd meg $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2$ értékét.

14. Legyen $P(x) = x^3 - 3x + 1$, és legyen $Q(x)$ az a harmadfokú polinom, aminek gyökei épp $P(x)$ gyökeinek négyzetei, és $Q(0) = -1$. Határozd meg $Q(9)$ értékét.
15. A $P(x) = x^3 - 9x^2 + 8x + 2 = 0$ polinom három gyöke legyen p, q, r . Határozd meg $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}$ értékét.
16. Legyen $x_1, x_2, \dots, x_n$ olyan valós számok, hogy $\sum_{k=1}^n x_i = 0$ és $\sum_{k=1}^n x_i^2 = 1$. Legyen továbbá $a = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ és $b = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Bizonyítsd be, hogy

$$ab \leq -\frac{1}{n}.$$

17. Határozd meg az összes $P(x)$ valós együtthatós polinomot, melyre

$$(x + 1)P(x - 1) - (x - 1)P(x)$$

egy konstans polinom.

3. Link a segítségékhez

