

Pólus-poláris és projektív geometria

Simon Laci foglalkozása

Definíció • Legyen két síkunk a térben, s_1 és s_2 , és egy P pontunk, ami egyik síkon sincs rajta. A P -n keresztül, s_1 -ről s_2 -re való vetítésnek azt az s_1 -ből s_2 -be menő függvényt hívjuk, ami az $A \in s_1$ ponthoz a $PA \cap s_2 \in s_2$ pontot rendeli.

F/1. Bizonyítsuk be, hogy ez a transzformáció egyenestartó.

F/2. Miért nem lesz ez egy "igazi" függvény s_1 és s_2 között?

Definíció • "Bővítsük ki" s_1 és s_2 síkot "végtelen távoli" pontokkal: minden irányhoz pontosan egy ilyen pont tartozik. Ha adott egy A pont, és egy végtelen távoli (ideális) pont, akkor az őket összekötő egyenes legyen az A ponton átmenő, a végtelen távoli pontnak megfelelő egyenes.

F/3. Mutassuk meg, hogy a vetítés egy bijekció a kibővített síkok között.

F/4. Mutassuk meg, hogy az s_1 -hez tartozó ideális pontok képei egy egyenesre esnek, és az s_2 -höz tartozó ideális pontok ősképei is egy egyenesre esnek.

Definíció • (ideális egyenes) Ez arra motivál minket, hogy azt mondjuk, hogy egy adott síkhoz tartozó ideális pontok egy egyenesre esnek. Ezt nevezzük ideális egyenesnek.

• (projektív sík) Az ideális egyenessel kibővített dolgot projektív síknak nevezzük.

Definíció • (sztereografikus projekció) Legyen Ω egy gömb, ennek P egy pontja. Legyen s az a sík, amelyik a P -vel átellenes pontban érinti Ω -t. Sztereografikus projekciónak nevezzük azt a transzformációt, ami az $A \in \Omega$ pontot a $PA \cap s$ pontba küldi.

F/5. gondoljuk meg, hogy két gömb, vagy egy gömb és egy sík metszete kör.

F/6. Lássuk be, hogy a térbeli inverzió gömböt vagy síkot gömbbe vagy síkba visz.

F/7. Adott Ω -ra és P -re találjunk egy inverziót, ami Ω -n megegyezik a sztereografikus projekcióval.

F/8. Lássuk be, hogy a sztereografikus projekció körtartó.

2025. december 29.

Szakkörvezető: Simon László Bence (lakisimon2005@gmail.com)

- Definíció**
- (Poláris) Adott egy O középpontú, ω kör. Egy $O \neq P$ pontra legyen P inverze ω -ra nézve P' . P polárisának nevezzük az OP' -re P' -ben állított merőlegest.
 - (Pólus) Adott egy O -n át nem menő l egyenes. Ekkor l pólusát úgy kapjuk, hogy: merőlegest állítunk O -ból l -re, és ezt a pontot invertáljuk.

- F/9.** Gondoljuk meg, hogy P akkor és csak akkor l pólusa, ha l P polárisa.
- F/10.** Adott egy ω kör és egy körön kívüli P pont. Állítsunk P -ből ω -ra érintőket. Ekkor P polárisa az érintési pontokat összekötő egyenes.
- F/11.** (La Hire tétele) Legyen X és Y két pont, melyek polárisai rendre x és y . Ekkor $x \in Y$ akkor és csak akkor teljesül, ha $Y \in x$ teljesül.
- F/12.** Adott Ω -ra és P -re találjunk egy inverziót, ami Ω -n megegyezik a sztereografikus projekcióval.
- F/13.** Defináljuk a pólust és polárist az egész projektív síkra úgy, hogy a fenti tulajdonságok továbbra is teljesülnek.
- F/14.** Adott egy P -n keresztüli vetítés s_1 és s_2 közt, és egy ω körünk s_1 -en, és tudjuk, hogy ω képe is egy kör. Lássuk be, hogy a vetítés pólus-poláris tartó, azaz ha (vesszővel jelölve a képeket) X polárisa x ω -ra nézve, akkor X' polárisa x' ω' -re nézve.
- F/15.** Lássuk be, hogy X' akkor és csak akkor lesz ω' középpontja, ha x' pont s_2 ideális egyenese.
- F/16.** Lássuk be az alábbi tételt:

Tétel. Adott egy ω kör és egy P pont a belsejében. Lássuk be, hogy létezik olyan vetítés, amire P' lesz ω' középpontja.

"Alkalmazások"/gyakorlás

- F/17.** Legyen egy vetítésünk és egy S négyzetünk. Adott nekünk a síkon S' . Szerkesszük meg S középpontjának a képét.
- F/18.** Az ABC háromszög I középpontú beírt köre a BC , CA , AB oldalakat rendre a D , E , F pontokban érinti. Az EF egyenes a BC egyenest K -ban metszi el. Bizonyítsuk be, hogy $AD \perp IK$.
- F/19.** Legyenek az ABC háromszögben a beírt kör érintési pontjai a megfelelő oldalakon D , E és F . Lássuk be, hogy AD , BE és CF egyenesek egy ponton mennek át.
- F/20.** Adott egy $ABCD$ négyszög ω beírt körrel. Az érintési pontok az oldalakon rendre E , F , G és H . Lássuk be, hogy az AC , BD , EG és FH egyenesek egy ponton mennek át.

2025. december 29.

Szakkörvezető: Simon László Bence (lacisimon2005@gmail.com)

- F/21.** (Pascal tétel)
a) Adott $ABCDEF$ húrhatároz. Tudjuk, hogy $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$. Lássuk be, hogy $CD \parallel FA$.
b) Lássuk be a Pascal tételt, azaz hogy minden húrhatározban a szemközti oldalak metszéspontjai egy egyenesen vannak.
- F/22.** (Brianchon tétel) Lássuk be, hogy egy érintőhatároz szemközti csúcsait összekötő egyenesek egy ponton mennek át.
- F/23.** * Adottak ABC és $A'B'C'$ háromszögek, amik perspektívek, és a közös beírt körük ω . Lássuk be, hogy a perspektivitás pontja és egyenese pólus-poláris viszonyban vannak ω -ra nézve.
- F/24.** ***** Legyen ABC háromszögben I és O rendre a beírt és köréírt kör középpontja. Legyen ω_A az a kör, ami átmegy B -n és C -n, és érinti a beírt kört. Definiáljuk ω_B és ω_C hasonlóan. Legyen A' az ω_B és ω_C körök A -tól különböző metszéspontja. Definiáljuk hasonlóan B' -t és C' -t. Lássuk be, hogy AA' , BB' és CC' egyenesek az OI egyenesen metszik egymást.
- F/25.** Az m egyenes érinti az ABC háromszög beírt körét. Az I -n átmenő AI , BI , CI egyenesekre merőleges egyenesek m -et az A' , B' , C' pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy az AA' , BB' , CC' egyenesek egy ponton mennek át.
-

Amikor nem trash a koordináta geometria

- F/26.** Lássuk be, hogy két körnek létezik a hatványvonala, azaz egy egyenes.
- F/27.** Adott két fix kör. Mi azon pontok mértani helye, amelyekre a pont két körre vett hatványának aránya fix?
- F/28.** Legyen az ABC háromszög mindhárom csúcsa az $xy = 1$ hiperbolán. Lássuk be, hogy a háromszög magasságpontja is ezen a hiperbolán van.
- F/29.** Legyen α és β két merőleges tengelyű parabola, metszéspontjaik A , B , C és D . Lássuk be, hogy $ABCD$ húrnégyszög.
- F/30.** ** Egy kör és egy ellipszis metszéspontjai A , B , C és D . Legyen $AB \cap CD = E$. Lássuk be, hogy AEB szög szögfelezője párhuzamos az ellipszis tengelyével.

2025. december 29.

Szakkörvezető: Simon László Bence (lacisimon2005@gmail.com)