

Bevezetés a polinomokba

Kovács Benedek foglalkozása (Hujter Bálint anyaga alapján)

Bemelegítő feladatok

F/1. (Arany Dániel verseny) Tekintsük a következő egyenletet:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = (2x-1)(2x-2)(2x-3)(2x-4).$$

Hány megoldást tudsz *ránézésre* leolvasni? Utána oldd is meg az egyenletet.

F/2. Oldd meg az egyenleteket.

- (a) $(x+2)(3x^2-4x+5)(6x-7) = 0$ (c) $4(x^3+1) = 7(x+1)$
(b) $9x^3 = 4x$

F/3. Hány megoldása van az egyenletnek?

- (a) $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$ (c) $x^4 + 6x^2 - 8 = 0$
(b) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ (d) $x^4 - 14x^2 + 1 = 0$

F/4.

- (a) Mutass példát olyan $\alpha > 1$ számra, amelyre $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ egész.
(b) Bizonyítsd be, hogy ha $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ egész, akkor $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$ is egész minden $n \in \mathbb{Z}^+$ -re.

Polinomok

- Polinomnak nevezünk egy p függvényt, ha felírható ilyen alakban:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

ahol $a_n \neq 0$. Itt a polinom foka n , amit így is jelölünk: $\deg p = n$. A polinom együtthatói $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$, főegyütthatója a_n , konstans tagja a_0 .

- A p polinomnak gyöke az α szám, ha $p(\alpha) = 0$.

F/5.

- (a) Végezzük el az alábbi szorzást: $(x^3 + 6x^2 - 4x + 1)(2x^2 - 5x + 6)$.
(b) Ha a p és q polinomok foka rendre a és b , akkor mennyi lehet a $p+q$, $p-q$, pq polinomok foka?
(c) Hányadfokú a következő polinom? Mi a főegyütthatója?

$$g(x) = (2x^3 - 4x^2 + 1)^{2023} - (3x^2 - x - 2)^{2022} \cdot (x+3)^{2025}$$

- (d) A g polinomban mennyi az együtthatók összege (ha teljesen kifejtjük)?

2025. december 5.

Szakkörvezető: Kovács Benedek (benoke981@gmail.com)

F/6. Világos, hogy egy egész együtthatós polinom minden egész helyen egész értéket vesz fel. Igaz-e az állítás megfordítása? Azaz: ha egy polinom minden egész helyen egész értéket vesz fel, akkor következik-e ebből, hogy minden együtthatója is egész?

F/7. Az $f(x) = 6x^5 - 37x^4 + 59x^3 - 54x^2 + 94x + 40$ polinomnak három gyöke van: $\frac{5}{2}$, 4 és $-\frac{1}{3}$. Határozd meg ez alapján a következő polinomok gyökeit:

(a) $g(x) = 6x^5 + 37x^4 + 59x^3 + 54x^2 + 94x - 40$,

(b) $h(x) = 40x^5 + 94x^4 - 54x^3 + 59x^2 - 37x + 6$.

F/8.* Oldd meg ezt a negyedfokú egyenletet:

$$12x^4 + 61x^3 + 99x^2 + 61x + 12 = 0.$$

Gyöktényezők kiemelése

F/9.

(a) A $p(x) = x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 15x + 9$ polinom felírható-e $p(x) = (x - 3)q(x)$ alakban, ahol q is polinom?

(b) És felírható-e $p(x) = (x - 2)q^*(x)$ alakban, ahol q^* is polinom?

(c) Mi a kapcsolata az előző két kérdésre adott válaszoknak $p(3)$, illetve $p(2)$ értékével?

Tétel. (kis Bézout-tétel) Tetszőleges $f(x)$ polinomra és α valós számra létezik olyan $g(x)$ eggyel kisebb fokú polinom, amellyel:

$$f(x) = (x - \alpha)g(x) + f(\alpha)$$

Tétel. (Gyökkiemelési tétel) Az f polinomnak akkor és csak akkor gyöke α , ha $(x - \alpha)$ kiemelhető a polinomból.

F/10. Bizonyítsuk be az alábbi következményt.

Következmény. Egy n -edfokú polinomnak legfeljebb n gyöke lehet.

F/11. Keressük meg az alábbi polinomok összes valós gyökét.

(a) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

(c) $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

(b) $6x^3 - 7x^2 - 76x - 63$

Definíció — A $p(x)$ polinomnak az α egy k -szoros gyöke, ha $(x - \alpha)^k$ kiemelhető a polinomból, de $(x - \alpha)^{k+1}$ már nem. Ekkor k -t nevezzük az α gyök *multiplicitásának*.

Tétel. Egy n -edfokú polinomnak (multiplicitással nézve is) legfeljebb n gyöke lehet.

2025. december 5.

Szakkörvezető: Kovács Benedek (benoke981@gmail.com)

Polinomok maradékos osztása

Tétel. Legyenek p_1, p_2 valós együtthatós polinomok. Ekkor léteznek olyan q, r valós együtthatós polinomok, melyekre $p_1 = q \cdot p_2 + r$ és $\deg r < \deg p_2$.

F/12. Végezzük el a következő maradékos osztásokat. Mi lesz a hányados és a maradék?

(a) $(6x^5 - x^4 + 3x^3 + 7) : (2x^2 + x - 4)$

(b) $(2x^4 - 7x^2 + 3x) : (x^3 - 2x^2 + 3)$

(c) $(3x^4 + 5x^3 - 4) : (x^2 - 3)$

F/13. Tegyük fel, hogy az $f(x)$ polinomot maradékosan osztva $g(x)$ -szel, a hányados $h(x)$. Igaz-e, hogy az $f(x)$ -et maradékosan osztva $h(x)$ -szel, a hányados $g(x)$ lesz?

F/14.* Egy R gyűrű *euklideszi*, ha van benne maradékos osztás, azaz definiálható egy $f : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}^{\geq 0}$ függvény úgy, hogy minden $a, b \in R$ és $b \neq 0$ esetén létezik $q, r \in R$, melyekre $a = bq + r$ és ($r = 0$ vagy $f(r) < f(b)$). Döntsük el, hogy euklidesziek-e az alábbi gyűrűk:

- (a) $\mathbb{Z}$ (az egész számok gyűrűje),
- (b) $\mathbb{R}[x]$ (a valós számok feletti polinomgyűrű),
- (c) $\mathbb{R}$ (a valós számok teste),
- (d) $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ (a Gauss-egészek gyűrűje),
- (e) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}i] = \{a + b\sqrt{2}i : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Racionális gyökteszt

F/15.

- (a) Bizonyítsuk be: egész együtthatós polinom (nemnulla) egész gyökei osztják a konstans tagot.
- (b) Hogyan lehet ezt általánosítani racionális gyökökre?

F/16. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán.

(a) $2x^3 - 13x^2 - 6x - 7 = 0$

(b) $6x^3 + 17x^2 + 26x + 21 = 0$

Nehéz feladatok

F/17.* Határozzuk meg azokat az $f(x)$ polinomokat, amelyekhez található olyan $p(t)$ polinom, amely kielégíti az $f(x^2) = p(f(x))$ azonosságot.

F/18.* (IMO 1973/3.) Állapítsuk meg $a^2 + b^2$ lehető legkisebb értékét, ha a és b olyan valós számokat jelentenek, amelyekre az $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ egyenletnek van legalább egy valós gyöke.

2025. december 5.

Szakkörvezető: Kovács Benedek (benoke981@gmail.com)