

# Polinomok

2025. december 5., Kós Géza (kosgeza@gmail.com)

## Feladatok

**F/1.** Mit kapunk maradékkul, ha az  $x^{2001}$  polinomot elosztjuk  $(x+1)^2$ -nel? (KöMaL B.3426., 2001. január)

**F/2.** Legyen  $a$  és  $b$  pozitív egész.

(a) Mi az  $x^a - 1$  és az  $x^b - 1$  polinomok legnagyobb közös osztója?

(b) Mi az  $1 + x + x^2 + \dots + x^{a-1}$  és az  $1 + x + x^2 + \dots + x^{b-1}$  polinomok legnagyobb közös osztója?

**F/3.** Adjunk meg olyan ötödfokú  $f$  polinomot, amelyre  $f(x) + 1$ -ből  $(x-1)^3$  és  $f(x) - 1$ -ből  $(x+1)^3$  kiemelhető. (KöMaL F.2508., 1985. január)

**F/4.** Mi legyen a kínai maradéktétel (egyváltozós, valós vagy komplex együtthatós) polinomokra vonatkozó változata?

**F/5.** Legyen  $p$  egy tetszőleges  $n$ -edfokú polinom, ahol  $n \geq 1$ . Bizonyítsuk be, hogy létezik legalább  $n+1$  olyan komplex szám, amelyre  $p$  értéke 0 vagy 1. (KöMaL A.288., 2002. március, Csörnyei Marianna)

**F/6.** Alakítsuk  $a$  polinomjainak szorzatává az

$$a^{10} + a^5 + 1$$

kifejezést. (KöMaL F.897., 1958. április)

**F/7.** Az  $n$ -edik *elsőfajú Csebisev-polinom* az az  $n$ -edfokú  $T_n$  polinom, amelyre

$$T_n(\cos t) = \cos nt, \quad T_n\left(\frac{t + \frac{1}{t}}{2}\right) = \frac{t^n + \frac{1}{t^n}}{2} \quad stb.$$

Bontsuk egész együtthatós polinomok szorzatává a  $T_{12}(x)$  polinomot.

**F/8.** Az  $n$ -edik *másodfajú Csebisev-polinom* az az  $n$ -edfokú  $U_n$  polinom, amelyre

$$U_n(\cos t) \sin t = \sin(n+1)t, \quad U_n(\operatorname{ch} t) \operatorname{sh} t = \operatorname{sh}(n+1)t, \quad U_n\left(\frac{t + \frac{1}{t}}{2}\right) \frac{t - \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^{n+1} - \frac{1}{t^{n+1}}}{2}.$$

Bontsuk egész együtthatós polinomok szorzatává az  $U_8(x)$  polinomot.

**F/9.** Bizonyítsuk be, hogy minden legalább elsőfokú egész együtthatós  $p(x)$  polinomhoz található olyan  $q(x)$  egész együtthatós polinom, amelyre  $p(q(x))$  felbontható két legalább elsőfokú, egész együtthatós polinom szorzatára. (KöMaL F.3006., 1995. február)

**F/10.** Legyen  $p(x)$   $n$ -edfokú polinom. Bizonyítsuk be, hogy ekkor van olyan  $0 \leq k \leq n+1$  egész szám, amelyre  $|p(k) - 3^k| \geq 1$ . (KöMaL F.2844., 1991. március)

**F/11.** Bizonyítsuk be, hogy ha  $p(x)$  egy 100-adfokú polinom, melyre  $p(1), p(2), \dots, p(102)$  a Fibonacci-sorozat ugyanilyen sorrendben egymás után következő elemei, akkor  $p(x)$  főegyütthatója  $\frac{1}{100!}$ . (Az  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  Fibonacci-sorozat elemeire  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ .) (KöMaL F.3006., 1994. március)

**F/12.** Határozzuk meg mindazokat az egész együtthatós  $f(x)$  és  $g(x)$  polinomokat, amikre

$$f(g(x)) = x^{2007} + 2x + 1.$$

(KöMaL A.429., 2007. május, Gyarmati Katalin)

**F/13.** Legyen  $p(x)$  egész együtthatós polinom,  $w$  pedig egységnyi abszolút értékű komplex szám. Igazoljuk, hogy ha a  $c = p(w)$  szám tisztán valós, akkor létezik olyan  $q(x)$  egész együtthatós polinom, amire  $c = q\left(w + \frac{1}{w}\right)$ . (KöMaL A.498., 2010. január, Károlyi Gyula)