

Első adag (2025. dec. 4. csütörtök délután)

1.1. Egy gráf legnagyobb fokszáma Δ , és van ennél kisebb fokú csúcsa (azaz nem reguláris). Bizonyítsd be, hogy a csúcsai színezhetők Δ színnel (úgy, hogy szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek).

1.2. Legyenek n és k pozitív egészek. Adott n zárt körlap a síkon úgy, hogy közülük bárhogy is választunk $k + 1$ körlapot, mindig van két olyan kiválasztott körlap, amelyeknek nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az n körlap besorolható legfeljebb $10k$ osztályba úgy, hogy azonos osztályba eső két körlapnak sosincs közös pontja. *(Kürschák 2020/1.)*

1.3. Legyen n páros szám. Egy n csúcsú teljes gráf csúcsaiba versenybolhákat ültetünk, éleit pedig megszámozzuk az $1, 2, \dots, \binom{n}{2}$ természetes számokkal. A számokat ezután növekvő sorrendben felolvassuk. Minden egyes szám felolvasása után a számhoz tartozó él két végén ülő bolha helyet cserél. A verseny győztese a legtöbb helycserét végző bolha. (Holtverseny esetén több győztes is lehet.)

a) Legfeljebb hány helycserét végezhet egy győztes bolha?

b) Legalább hány helycserét kell végeznie egy győztes bolhának?

c) ★ Mit lehet mondani páratlan n esetén? *(OKTV 2015/16 3.kat/1.ford./5. alapján)*

1.4. Egy teremben 4 asztal és 8 ember van. Egy 32 lapos magyarkártya-paklit véletlenszerűen szétosztottuk a 8 ember között úgy, hogy mindegyik ember kezében 4 lap legyen.

Bizonyítsuk be, hogy mindegyik ember letehet 1-1 lapot a kezéből a 4 asztalra úgy, hogy végül mind a 4 asztalon 8 különböző értékű kártya (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász) legyen.

1.5. ★ Egy G gráf k -színezése a G csúcsainak megszínezése k lehetséges szín felhasználásával úgy, hogy G bármely élének végpontjai különböző színűek legyenek. Azt mondjuk, hogy G egyértelműen k -színezhető, ha egyrészt G -nek létezik k -színezése, másrészt nem léteznek G -nek olyan u és v csúcsai, melyek G valamely k -színezésében azonos színűek, míg G egy másik k -színezésében egymástól különböző színt kapnak. Bizonyítsuk be, hogy ha az n pontú G gráf egyértelműen 3-színezhető és $n \geq 3$, akkor G -nek legalább $2n - 3$ éle van. *(Kürschák 2003/2.)*

1.6. ★ Egy konvex poliéder minden lapja négyszög. Mutassuk meg, hogy a lapjait háromszögekre bonthatjuk egy-egy átló meghúzásával úgy, hogy a poliéder minden csúcsánál páros számú háromszög találkozzon. *(KöMaL A. 649., Nagy János)*

Második adag (2025. dec. 4. csütörtök este)

- 2.1.** a) Igaz-e, hogy minden 4-reguláris gráf élei kiszínezhetők pirosra és kékre úgy, hogy minden csúcsban 2 piros és 2 kék él találkozzon?
 b) Igaz-e, hogy minden 6-reguláris gráf élei kiszínezhetők pirosra és kékre úgy, hogy minden csúcsban 3 piros és 3 kék él találkozzon?
 c) ★ Igaz-e, hogy minden 6-reguláris gráf élei kiszínezhetők pirosra, kékre és zöldre úgy, hogy minden csúcsban 2 piros, 2 kék és 2 zöld él találkozzon?

2.2. Bizonyítsd be, hogy ha egy síkbarajzolt gráfnak van Hamilton-köre, akkor a tartományai színezhetők 4 színnel. (LKPF¹ 9.53)

2.3. Adott egy gráf. Tekintsük azt a kétszemélyes játékot, ahol a kezdő játékos kijelöl egy csúcsot, ezután a soron következő játékos mindig egy szomszédos csúcsra lép. Az veszít, aki olyan csúcsra lép, ahol már jártak korábban. A gráf milyen tulajdonságától függ, hogy kinek van nyerő stratégiája?

2.4. Egy sakktáblán áll 33 bástya. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük 5 bástya, melyek közül semelyik kettő nincs azonos sorban vagy oszlopban.

2.5. ★ Egy $n \times n$ -es T táblázat mezőibe egy-egy számot írtunk úgy, hogy egyik sorban sem szerepel kétszer ugyanaz a szám. Bizonyítsuk be, hogy át lehet rendezni a T -ben szereplő számokat úgy, hogy az átrendezés utáni T^* táblázat minden sorában pontosan ugyanazok a számok álljanak, mint amelyek T megfelelő sorában álltak, de T^* semelyik oszlopában se szerepeljen kétszer ugyanaz a szám.
(Kürschák 2017/3.)

Három kapcsolódó klasszikus tétel

Ezekről csak érintőlegesen fogunk beszélni, de mindegyiken lehet gondolkodni.

2.6. (Tait tétele, 1880) ★ Adott egy 3-reguláris, hídélmentes síkbarajzolt gráf. Ekkor:
 A gráf tartományai színezhetők 4 színnel $\iff$ A gráf élei színezhetők 3 színnel. (LKPF 9.51.)

2.7. (Petersen tétele, 1891) ★ Bizonyítsd be: 3-reguláris, hídélmentes gráfban mindig van teljes párosítás.

2.8. (Mycielski-konstrukció, 1955) ★ Konstruálj háromszögmentes gráfokat tetszőlegesen nagy kromatikus számmal.

¹Lovász László: Kombinatorikai Problémák és Feladatok (Typotex 2008 verzió számozásaival)

Harmadik adag (2025. dec. 5. péntek reggel)

3.1. Egy dobozban zoknik vannak, legalább kétféle színben és legalább kétféle hosszúságban. Bizonyítsd be, hogy ki lehet választani egy *antipárt*, azaz két olyan zoknit, amelyek színe és hossza is eltér.

3.2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges gráf bármely nem bővíthető párosításának élszáma legalább fele a maximális méretű párosítás élszámának.

3.3. Legyen n pozitív egész. Határozzuk meg azt a legkisebb k számot, ahány színnel bármilyen n csúcsú irányított egyszerű gráf élei színezhetők úgy, hogy ne legyen benne egyszínű kör. (KöMaL B.5105.)

3.4. A Gallai–Roy-tétel azt mondja ki, hogy ha a G irányított gráfban nincsen m élű egyirányú út, akkor $\chi(G) \leq m$.

a) Bizonyítsuk be a tételt aciklikusan irányított gráfokra.

b) ★ A teljes tétel bizonyítása is szép és rövid, de trükkös. (Szabad rajta gondolkodni.)

c) Bizonyítsd be, hogy minden turnamentben van Hamilton-út.

A turnament egy olyan gráf, ahol bármely két csúcsot él köt össze az egyik irányban. (LKPF 9.9.)

3.5. (Minty tétele, 1962) ★ Tetszőleges G irányítatlan gráfra ekvivalensek:

(1) Csúcsai k színnel színezhetők (azaz $\chi(G) \leq k$).

(2) G irányítható oly módon, hogy G bármely körén legfeljebb az élek $\frac{k-1}{k}$ része mutasson ugyanazon körjárási irányba.

(LKPF 9.11.)

3.6. ★ Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráf éleit mindig lehet úgy irányítani, hogy minden pont kifoka legfeljebb három legyen. (KöMaL A.782.)

Negyedik adag (2025. dec. 5. péntek délelőtt)

Emlékeztetőül:

- $\chi(G)$ a gráf kromatikus számát jelenti (legkevesebb hány színnel lehet a csúcsait színezni?);
- $\omega(G)$ a gráfban levő legnagyobb klikk (teljes részgráf) méretét.

4.1. Legyen G páros gráf, és jelölje $\overline{G}$ a komplementerét.

Bizonyítsd be, hogy ekkor $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$.

(LKPF 9.30., Gallai 1958)

4.2. A G gráf *élgráfja* az a H gráf, amelynek csúcsai G élei, és H két csúcsa akkor van éllel összekötve, ha a nekik megfelelő G -beli élek szomszédosak.

Bizonyítsd be, hogy ha H egy páros gráf élgráfja, akkor **a)** $\chi(H) = \omega(H)$ **b)** $\chi(\overline{H}) = \omega(\overline{H})$.

4.3. Vegyük egy véges halmaz néhány részhalmazát. Legyenek G gráf csúcsai a részhalmazok, és két csúcsot akkor kössünk össze, ha a nekik megfelelő részhalmazok közül az egyik tartalmazza a másikat. Bizonyítsuk be, hogy a G gráfra **a)** $\chi(G) = \omega(G)$ és **b)** $\star \chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$ teljesül.

Hogyan lehetne ezeket az állításokat a részhalmazok nyelvén megfogalmazni?

4.4. $\star$ Adott $4n$ kavics, amelyeknek a súlya rendre $1, 2, 3, \dots, 4n$. Mindegyik kavics n szín közül az egyik színnel van kifestve; mindegyik színből négy kavics van. Mutassuk meg, hogy a kavicsokat el lehet rendezni két kupacba úgy, hogy mindkét alábbi feltétel teljesüljön:

- A két kupac összsúlya azonos.
- Mindegyik kupac minden színből két kavicsot tartalmaz.

(IMO 2020/3., javasolta Haiman Milán és Carl Schildkraut)

4.5. Rajzoljunk a síkba egyeneseket úgy, hogy nincsen köztük 3, melyek egy pontban metszik egymást. Tekintsük a metszéspontokat egy gráf pontjainak, és a szomszédos metszéspontok közötti szakaszokat a gráf éleinek. Bizonyítsuk be, hogy a kapott síkbarajzolt gráf 3-színezhető. (LKPF 9.57., Sachs tétele)

4.6. $\star$ Ha egy egyszerű síkgráf (konvex poliéder) éleit pirossal és kézzel színezzük, akkor mindig van olyan csúcs, mely körül a piros és a kék élek egymástól elválasztva következnek.