

Inverzió

2025. december 4., Gyenes Zoltán (gyeneszoltan@fazekas.hu)

Inverzió

Adott a síkon egy O középpontú, R sugarú kör. A $P \neq O$ pont P' képe a következő módon van definiálva: P' az a pont az OP félegyenesen, melyre $OP \cdot OP' = R^2$.

Feladatok

Bemelegítés

- F/1.** a. Adott egy kör a síkon a középpontjával. Szerkeszd meg a P pont inverz képét a körre.
b. Szerkeszd meg a P pont inverz képét a körre csak körzővel.
- F/2.** a. Legyen adott az inverzió alapköre, és legyen A és B tetszőleges. Bizonyítsd be, hogy A , A' , B , B' egy körre vagy egy egyenesre esik.
b. Legyen k egy tetszőleges kör A -n és A' -n keresztül. Bizonyítsd be, hogy $k' = k$.
c. Bizonyítsd be, hogy az inverzió alapkörének inverz képe k -ra szintén önmaga.
- F/3.** a. Bizonyítsd be, hogy az O ponton átmenő kör inverz képe egyenes.
b. Bizonyítsd be, hogy az O ponton át nem menő kör inverz képe kör.
c. Bizonyítsd be, hogy az O át nem menő egyenes képe kör.
- F/4.** Bizonyítsd be, hogy az inverzió szögtartó. (Két egymást metsző kör szöge alatt a közös pontjukba rajzolt érintőik szögét értjük.)
- F/5.** Adott a síkon két kör, melyeknek nincs közös pontja. Bizonyítsd be, hogy mindig lehet úgy invertálni egy alkalmas k körre, hogy a két adott kör inverz képe koncentrikus legyen.
- F/6.** Legyen adott egy k kör. Bizonyítsd be, hogy ha a k kör egy pontjára invertálunk (bármilyen sugárral), akkor a k -ra való inverzióból a k' egyenesre való tengelyes tükrözés lesz.
- F/7.** (Az inverzió kettősviszonytartó) Adott az egy egyenesen vagy egy körön lévő A , B , C és D pont. Bizonyítsd be, hogy $\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \frac{A'B' \cdot C'D'}{A'D' \cdot B'C'}$.

Mohr-Mascheroni tétel

- F/8.** Adott a síkon az A és a B pont. Szerkeszd meg csak körzővel az AB szakasz felezőpontját.
- F/9.** Adott a síkon a nem kollineáris A , B és C pont. Szerkeszd meg az A pontból a BC egyenesre bocsájtott merőleges T talppontját csak körzővel.
- F/10.** Adott a síkon a k kör (a középpontjával) és két pont, A és B . Szerkeszd meg az AB egyenes inverz képét csak körzővel (amennyiben az inverz kép kör).
- F/11.** Adott a síkon három nem kollineáris pont. Szerkeszd meg a körülírt körüket csak körzővel.
- F/12.** Adott a síkon négy általános helyzetű pont, A , B , C és D . Szerkeszd meg az AB és CD egyenes metszéspontját csak körzővel.
- F/13.** Adott síkon az A és a B pont és a k kör. Szerkeszd meg a k kör és az AB egyenes metszéspontjait csak körzővel.

Alkalmazás feladatokban

- F/14.** (Apollóniusz feladat) Adott a síkon három kör. Szerkeszd meg azokat a köröket, melyek mind a három adott kört érintik.
- F/15.** (Apollóniusz-kör) A k körre nézve A pont inverze A' . Bizonyítsd be, hogy a k kör tetszőleges P pontját tekintve a PA/PA' arány állandó.
- F/16.** (Harmonikus négyszög) Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög, és tegyük fel, hogy van olyan inverzió, amely A -t és C -t fixen hagyja, B -t és D -t pedig megcseréli. Bizonyítsd be, hogy a négyszög harmonikus, azaz $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Igaz-e az állítás megfordítása, azaz ha egy húrnégyszögben $AB \cdot CD = AD \cdot BC$, akkor van olyan inverzió, amely A -t és C -t fixen tartja, és B -t és D -t megcseréli?
- Az ilyen húrnégyszögeket harmonikusnak nevezzük.*
- F/17.** a. Invertáljuk egy háromszög körülírt körét a beírt körére. Adj minél egyszerűbb jellemzést a kapott körrel.
b. Bizonyítsd be, hogy bármely háromszög beírt körének középpontja, körülírt körének középpontja, és a beírt kör érintési pontjai által alkotott háromszög súlypontja egy egyenesre esik.
- F/18.** Adott a síkon a k_1 , k_2 , k_3 és k_4 kör úgy, hogy k_1 és k_3 körök érintik a k_2 és a k_4 kört is. Bizonyítsd be, hogy a négy érintési pont egy egyenesre vagy egy körre esik.
- F/19.** Adott a síkon az ABC háromszög. Vegyük fel azt a kört, amely érinti az AB oldalt, az AC oldalt és a körülírt kört: ez utóbbival az érintési pontot a P jelöli. Húzzunk továbbá párhuzamost a BC oldallal úgy, hogy az érintse a beírt kört: az érintési pont legyen Q . Bizonyítandó, hogy $BAP \sphericalangle = CAQ \sphericalangle$.
- F/20.** a. Adjunk meg a síkon 1000 pontot úgy, hogy ne essen mind egy egyenesre, és bármely kettő távolsága egész szám legyen.
b. Adjunk meg a síkon 1000 pontot úgy, hogy semelyik három ne essen egy egyenesre, és bármely kettő távolsága egész szám legyen.
- F/21.** Adott a síkon ebben a sorrendben egy egyenesen az A , B és C pont. Rajzold meg AB , BC és AC Thálesz-körét. k_1 legyen az a kör, amely érinti mindhárom Thálesz-kört, k_i pedig legyen az a kör, amely érinti az AB , az AC Thálesz-körét és a k_{i-1} kört (és persze különbözik a k_{i-2} körtől). Bizonyítsd be, hogy k_i középpontjának a távolsága AB -től egyenlő i -szer a k_i kör átmérőjével.
- F/22.** (Kürschák verseny, 2000/2) Legyen ABC nem szabályos háromszög, és legyen ω a körülírt köre. A sík egy tetszőleges P pontjára legyen a PA , PB és PC egyenes második metszéspontja a körrel A' , B' és C' . Bizonyítsd be, hogy pontosan két olyan P pont létezik a síkban, melyre $A'B'C'$ szabályos, és ez a két pont és az ω középpontja egy egyenesre esik.
- F/23.** Az ABC háromszög beírt köre az oldalt az X , Y és Z pontokban érinti a BC , CA és AB oldalt. Az XYZ háromszög magasságainak talppontja X' (az YZ oldalon) és Y' (az XZ oldalon). Az $X'Y'$ egyenes az ABC háromszög körülírt körét a P és a Q pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy a P , Q , X és Y pont egy körre esik.
- F/24.** Adott egy körön az A , B , C és P pont. Bizonyítsd be, hogy a PA , PB , PC szakaszok Thálesz-köreinek P -n kívüli metszéspontjai kollineárisak.
- F/25.** Legyen A , B , C és D négy pont egy körön, melyekre $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ teljesül. Az ABC háromszög I középpontú beírt köre az oldalakat rendre az A' , B' , C' pontokban érinti. Legyen K az ID szakasz és az $A'B'C'$ Feuerbach-körének metszéspontja. Legyen végül S az $A'B'C'$ háromszög súlypontja. Bizonyítsd be, hogy az SK és a BB' egyenes az ABC háromszög beírt körén metszik egymást.