

Olimpiai szakkör 2025. november 28.

A legutóbbi szakkörrel maradt egy feladat:

5. Az ABC hegyesszögű háromszögben M a BC felezőpontja, C merőleges vetülete AM -re P . Az ABP kör másodjára Q -ban metszi a BC oldalt. Legyen N az AQ szakasz felezőpontja. Bizonyítsd be, hogy $NB=NC$.

1. a, b, c, d valós számok. $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ és $ac+bd=0$. $ab+cd=?$

2. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott AB , a beírt és az AB -hez hozzáírt kör sugara.

3. Egy kocka alakú terem falain mozog három pók. Hálójuk az általuk alkotott háromszögben feszül ki. A teremben röpköd egy légy. A pókok és a légy sebessége azonos. Elkaphatják-e a pókok a legyet?

4. Ketten amőbáznak. Amíg A játékos minden lépésben egy mezőt jelölhet be, addig B játékos minden lépésben kettőt. Akkor nyer B , ha tíz szomszédos jelöltje lesz. Megakadályozhatja-e A , hogy B nyerjen?

5. A k kör belsejében van az $ABCD$ négyzet. Tekintsük azt a kört, amely belülről érinti k -t és érinti az AB és AD egyenesek A -ból induló B -t és D -t nem tartalmazó felét, ez a kör k -t A' -ben érinti. Hasonlóan kapjuk B' , C' és D' pontokat. Igazoljuk, hogy AA' , BB' , CC' és DD' egy ponton mennek át.

6. Hány olyan $p(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ polinom van, amelynek együtthatói 100-nál nem nagyobb különböző pozitív egészek és $p(x)$ osztható x^2+x+1 -gyel?

7. a, b olyan pozitív egészek, hogy $p = \frac{b}{4} \sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ prímszám. Legfeljebb mekkora lehet p ?

8. BBH a t területű háromszögben $4t \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) \leq 9R^2$, ahol R a köréírt kör sugara.