

Olimpiai szakkör 2025. november 7.

A legutóbbi szakköről maradt három feladat:

2. Egy 5×7 -es tábla fedhető-e **L** alakokkal úgy, hogy minden mezőt ugyanannyi **L** fedjen? Az **L** -ek nem lóghatnak le a tábláról, de több rétegben lehetnek egymás felett. (**L** alakzat: egy 2×2 -es, egyik mezőjének elhagyásával)

6. (a) Színezzük meg a koordináta-rendszer rácspontjait két színnel, késsel és pirossal úgy, hogy minden vízszintes egyenesen csak véges sok kék rácspont legyen és minden függőleges egyenesen csak véges sok piros rácspont legyen. Rácspontnak a sík olyan pontjait nevezzük, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám. (b) Nevezzünk egy pontot racionálisnak, ha mindkét koordinátája racionális. Van-e (a) szerinti színezése a racionális pontoknak?

7. Egy kocka felszínén behúztunk három lapátlót, melyek páronként kitérőek. Egy egyenes mindhárommal ugyanakkora szöget zár be. Mekkora lehet ez a szög?

1. Apolloniusz féle feladatok: a {pont, egyenes, kör} alakzatok közül adott három. Szerkesszünk olyan kört, aminek mindhárommal egy közös pontja van. Az alakzatokat a továbbiakban a kezdőbetűjükkel jelöljük. Szerkesszük meg a pke, pkk, kke eseteket.

2. k_1 kör és k_2 kör belülről érintik a K kört. k_1 kör és k_2 két metszéspontja A és B , külső hasonlósági (nagyítási) pontjuk H . A H -ból K -hoz húzott két érintő érintési pontja X és Y . Bizonyítsd be, hogy A , B , X , Y egy körön van.

3. Az ABC háromszög beírt köre az oldalakat megfelelően A' , B' és C' -ben érinti. Igazoljuk, hogy az $AB'C'$ háromszög $B'C'$ -gyel párhuzamos középvonalának és a $BA'C'$ háromszög $A'C'$ -gyel párhuzamos középvonalának metszéspontja rajta van az AB felező merőlegesén.

4. Az ABC háromszög magasságvonalainak talppontjai a BC , AC és AB oldalakon rendre D , E és F . Az AB és DE metszéspontja P , az AC és DF metszéspontja Q . Bizonyítsd be, hogy a PQ egyenese merőleges az ABC háromszög Euler-egyenesére.

5. Az ABC hegyesszögű háromszögben M a BC felezőpontja, C merőleges vetülete AM -re P . Az ABP kör másodjára Q -ban metszi a BC oldalt. Legyen N az AQ szakasz felezőpontja. Bizonyítsd be, hogy $NB=NC$.