

Komplex számok geometriai alkalmazásai

Olimpia Iskola, 2025. október 25.

Segédeszközök és bevezető feladatok

1. A komplex sík A, B, C pontjai akkor és csak akkor kollineárisak, ha

$$\frac{c-a}{c-b} = \overline{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}$$

2. Legyenek A, B, C és D a komplex sík különböző pontjai. Igazoljuk, hogy az AB és CD egyenesek akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha

$$\frac{d-c}{b-a} + \overline{\left(\frac{d-c}{b-a}\right)} = 0.$$

3. Legyen W pont a Z tükörképe az AB egyenesre. Mutassuk meg, hogy

$$w = \frac{(a-b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}}.$$

4. Legyenek A_1, A_2, B_1, B_2 egy 0 középpontú kör pontjai. Akkor az A_1A_2 és B_1B_2 egyenesek metszéspontja

$$w = \frac{a_1a_2(b_1+b_2) - b_1b_2(a_1+a_2)}{a_1a_2 - b_1b_2}.$$

5. A komplex sík A, B, C, D pontjai esetén az AB és CD egyenesek metszéspontja

$$w = \frac{(\bar{a}b - a\bar{b})(c-d) - (a-b)(\bar{c}d - c\bar{d})}{(\bar{a} - \bar{b})(c-d) - (a-b)(\bar{c} - \bar{d})}.$$

6. Az ABC háromszög körülírt körének középpontja:

$$k = \frac{a(|b|^2 - |c|^2) + b(|c|^2 - |a|^2) + c(|a|^2 - |b|^2)}{a(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a} - \bar{b})}.$$

7. Ha négy pont egy körön van, akkor kettősviszonyuk valós, ha viszont a kettősviszonyuk valós, akkor a négy pont vagy egy körön vagy egy egyenesen van.

8. Az ABC háromszög akkor és csak akkor szabályos, ha csúcsaira:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

9. Minden érintőnégyszög beírt körének középpontja rajta van az átlók felezőpontjait összekötő egyenesen.

10. Mutassuk meg, hogy tetszőleges négyszög csúcsaiból képzett háromszögek Feuerbach-köröi egy közös ponton mennek át.

11. Igazoljuk, hogy ha $a = x^2, b = y^2, c = z^2$, akkor az ABC háromszög beírt körének I középpontjára

$$j = -xy - yz - zx.$$

Miért nem megfelelő választás az $xy + yz + zx$?

Feladatok

12. Az $ABCD$ húrnégyszögben jelöljük rendre a BCD , CDA , DAB , ABC háromszögek magasságpontjait H_A , H_B , H_C , H_D -vel. Igazoljuk, hogy AH_A , BH_B , CH_C és DH_D egyenesek egy pontban metszik egymást.
13. Az $A_1A_2A_3$ háromszög oldalai a_1 , a_2 , a_3 (a_i az A_i -vel szemközti oldal). Legyen M_i az a_i oldal felezőpontja, T_i pedig az a pont, amelyben a beírt kör érinti az a_i oldalt. Tükrözzük a T_i pontot a háromszög A_i -hez tartozó belső szögfelezőjére, kapjuk az S_i pontot. ($i = 1, 2, 3$). Bizonyítsuk be, hogy az M_1S_1 , M_2S_2 , M_3S_3 egyenesek egy pontban metszik egymást.
14. Az ABC háromszögben $CAB \sphericalangle = 30^\circ$, $BCA \sphericalangle = 54^\circ$. Legyen D a BC oldalának az a pontja, amelyre $CAD \sphericalangle = 12^\circ$, továbbá az E pont az AB oldalnak az a pontja, amelyre $ACE \sphericalangle = 6^\circ$. Az AD és CE szakaszok metszéspontja M . Igazoljuk, hogy $WB = BC$.
15. Az ABC háromszög körülírt köre k . Legyenek AA' , BB' , CC' a k kör átmérői. Legyen P az ABC háromszög tetszőleges belső pontja és D , E , F a P pontból rendre a BC , CA , AB egyenesekre állított merőlegesek talppontjai. Legyen X az A' pontnak a D -re vonatkozó tükörképe. Hasonlóan definiáljuk az Y és Z pontokat is: Y az B' pont tükörképe a E -re, míg Z a C' pont tükörképe F -re. Igazoljuk, hogy az $XYZ \triangle \sim ABC \triangle$.
16. Az EF átmérőjű k kört az e egyenes az E pontban érinti. Tekintsük az e egyenes összes olyan A, B pontpárját, melyre az AB szakasz az E pontot tartalmazza és $AE \cdot EB$ egy rögzített állandó. Egy ilyen pontpár esetén legyen A' , illetve B' a k kör metszéspontja az AF , illetve BF szakasszal. Igazoljuk, hogy az $A'B'$ szakaszok egy ponton mennek keresztül.
17. Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen I pont. A beírt kör érintse a CA és AB oldalakat rendre E és F pontban. Az E és F pontok tükörképe az I pontra G és H . Legyen továbbá a BC oldal felezőpontja M , a GH és BC egyenesek metszéspontja pedig Q . Mutassuk meg, hogy IQ és IM merőlegesek egymásra.
18. Legyen H az ABC háromszög magasságpontja. D , E és F az ABC körülírt körének olyan pontjai, amelyekre $AD \parallel BE \parallel CF$. Legyenek S , T , U rendre a D , E és F pontok tükörképei a BC , CA , AB egyenesekre. Igazoljuk, hogy S , T , U és H egy körön vannak.
19. Az ABC háromszög körülírt körének középpontja O pont. Az O -n áthaladó ℓ egyenes az AB , illetve az AC oldalakat X , illetve Y pontokban metszi. Legyen M a BY , N pedig a CX felezőpontja. Mutassuk meg, hogy $MON \sphericalangle = BAC \sphericalangle$.
20. Legyen az ABC olyan hegyesszögű háromszög, amelyben $AB > BC$ és $AC > BC$. Jelöljük a körülírt kör középpontját O -val, a magasságpontot H -val. Az AHC háromszög körülírt köre messe másodszor az AB egyenest M -ben, továbbá AHB körülírt köre messe másodszor AC -t N -ben. Bizonyítsuk be, hogy az MHN körülírt körének középpontja rajta van az OH egyenesen.