

Olimpiai Iskola, 2025. október 25.

1. Mi is az a pont körre vonatkozó hatvány? Az alábbi feladatsor erre épülő bevezetés.
2. Adott a k_1 és k_2 kör. Hol vannak azok a P pontok, amelyekre $k_1(P) = k_2(P)$? Mi ennek a következménye, ha három kört vizsgálunk?
3. Két egymást A -ban érintő kör közös A -beli érintőjének egy P pontjából húzunk a két körhöz egy egy szelőt. Igazoljuk, hogy a négy metszéspont egy körön van.
4. Apollonius féle feladatok: a $\{\text{pont}, \text{egyenes}, \text{kör}\}$ alakzatok közül adott három. Szerkesszünk olyan kört, aminek minhárommal egy közös pontja van. Az alakzatokat a továbbiakban a kezdőbetűjükkel jelöljük. Szerkesszük meg a ppe, ppk, pke, pkk, kke eseteket.
5. Legyen AB a Γ kör egy húrja, és ω_1 egy kör, ami érinti AB -t és Γ -t rendre a P_1 és Q_1 pontokban, illetve ω_2 ugyanígy a P_2 és Q_2 érintési pontokkal. A két kör középpontja az AB egyenes azonos oldalán van. Bizonyítsd be, hogy $P_1P_2Q_1Q_2$ egy körön vannak.
6. Az ABC háromszögben a B -ből induló magasság P -ben és Q -ban metszi AC Thálesz-körét, míg a C -ből induló magasság R -ben és S -ben metszi AB Thálesz körét. Bizonyítsd be, hogy P, Q, R, S egy körön van.
7. ABC háromszög egy belső pontja P . A PA, PB és PC szakaszokon van rendre D, E és F . A PDE kör és az AB egyenes metszéspontjai G és H . A PEF kör és a BC egyenes metszéspontjai I és J . A PFD kör és a CA egyenes metszéspontjai K és L . Bizonyítsd be, hogy G, H, I, J, K, L egy körön van.
8. Az ABC háromszög köréírt körének középpontja O , valamint P egy tetszőleges pont a síkon. A BCP körhöz P -ben húzott érintő és a BC egyenes metszéspontja A' . Hasonlóan definiáljuk B' -t és C' -t is. Bizonyítsd be, hogy A', B' és C' egy egyenesen vannak, amely merőleges OP -ra.
9. ω_1 kör és ω_2 kör belülről érintik a Γ kört. ω_1 és ω_2 két metszéspontja A és B , külső hasonlósági (nagyítási) pontjuk H . A H -ból Γ -hoz húzott két érintő érintési pontja X és Y . Bizonyítsd be, hogy A, B, X, Y egy körön van.
10. Az ABC háromszög beírt köre az oldalakat megfelelően A_1, B_1 és C_1 -ben érinti. Igazoljuk, hogy az AB_1C_1 háromszög B_1C_1 -gyel párhuzamos középvonalának és a BA_1C_1 háromszög A_1C_1 -gyel párhuzamos középvonalának metszéspontja rajta van az AB felező merőlegesén.
11. Az ABC háromszög magasságvonalainak talppontjai a BC, AC és AB oldalakon rendre D, E és F . Az AB és DE metszéspontja P , az AC és DF metszéspontja Q . Bizonyítsd be, hogy a PQ egyenese merőleges az ABC háromszög Euler-egyenesére.
12. P a sík egy pontja, ω_1 és ω_2 körök. A, B rendre a P -ből húzott érintési pontok ω_1 -hez, míg C, D rendre a P -ből húzott érintési pontok ω_2 -höz. $AB \cap CD = Q$. Bizonyítsd be, hogy PQ felezőpontja rajta van ω_1 és ω_2 hatványvonalán.
13. Az ABC hegyesszögű háromszögben M a BC felezőpontja, C merőleges vetülete AM -re P . Az ABP kör másodjára Q -ban metszi a BC oldalt. Legyen N az AQ szakasz felezőpontja. Bizonyítsd be, hogy $NB = NC$.