

A számelmélet alapétele, Gauss-egészek

2025. október 24., Seres-Szabó Marci (marton.seresszabo@gmail.com)

1. feladat Oldjuk meg a $a^2 - 5b^2 = 1$ Pell-egyenletet!

2. feladat Oldjuk meg az egészekben: $x^2 - 16 = y^3$! Oldjuk meg ezt is: $x^2 + 1 = y^3$!

3. feladat Nézzük a következő integritási tartományokat: $\mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \mathbb{Z}[\sqrt{5}], \mathbb{Z}[\zeta_5]$ (ζ_5 egy primitív 5. egységgyök, vagyis $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ azt jelenti, hogy ζ_5 -ből és egészekből pakolhatunk össze összeadással és szorzással kifejezéseket)! Tényleg zárt az összeadásra, szorzásra? Nullosztómentes? Hány egység van? (Mik ezek?)

4. feladat Bizonyítsuk be, hogy minden prím felbonthatatlan!

5. feladat Találhatunk-e jó Euklideszi-normát az alábbi integritási tartományokban: $\mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \mathbb{Z}[\sqrt{-3}], \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?

6. feladat Gondoljuk meg, hogy $1+i \mid 1-i$! Legyen $\pi \notin \mathbb{Z}$, $\pi \neq 1+i$ egy prím $\mathbb{Z}[i]$ -ben. Mutassuk meg, hogy π nem osztja $\bar{\pi}$ -t! (Vagyis a $4k+1$ alakú $\mathbb{Z}$ -beli prímekek valóban két különböző Gauss-prím szorzatára bomlanak.)

7. feladat Bontsuk fel prímtenyezőkre $\mathbb{Z}[i]$ -ben az alábbi számokat: $29; 91 + 63i; 65$

8. feladat Határozzuk meg $\mathbb{Z}[i]$ -ben az alábbi kitüntetett közös osztókat! $(11+3i, 1+8i) = ?; (1+2i, 1-2i) = ?$

9. feladat Bizonyítsuk be, hogy $n, m > 0, a > 1$ egészek esetén:

$$(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$$

10. feladat Bizonyítsuk be, hogy $2^{32} + 1$ nem prímszám, ha tudjuk, hogy $2^{32} + 1 = 62264^2 + 20449^2$ teljesül!

11. feladat Bizonyítsuk be Fermat-karácsonyi tételét: pontosan azon pozitív egészek állnak elő két négyzetszám összegeként, melyeknek a prímtenyezős alakjában a négygyel osztva 3 maradékot adó prímekek páros kitevőn szerepelnek. Határozzuk meg egy szám prímtenyezős alakjából, hogy hányféleképpen áll elő két négyzetszám összegeként!

12. feladat Bizonyítsuk be, hogy ha $a^2 + b^2 = c^2$ Pithagorszi-számhármas, ahol $(a, b) = 1$, akkor létezik $(m, n) = 1$ és $2 \mid mn$, hogy a és b valamilyen sorrendben $m^2 - n^2$ és $2mn$. Mi lesz az $a^2 + b^2 = c^5$ általános megoldásának alakja, ha $(a, b) = 1$?

13. feladat Bizonyítsuk be, hogy az $x^4 + y^4 = z^2$ egyenletnek nincs megoldása az egészekben!

14. feladat Ha $x, y, z \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $xy = z^2 + 1$, akkor bizonyítsd be, hogy létezik $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, hogy $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$ és $z = ac + bd$.

15. feladat

a) $x^2 = y^3 - 1$

b) $x^2 = y^3 - 4$

c) $y^2 = x^d - 1$, ahol $d \geq 2$, akkor $y = 0$. (V. A. Lebesgue)

16. feladat (további Mordell-egyenletek)

a) $y^2 = x^3 - 2$

b) $y^2 = x^3 - 243$

c) $y^2 = x^3 + 7$

17. feladat Keressük meg az összes pozitív egészekből álló (x, y) párt, amire $13^x + 3 = y^2$ teljesül! (Mathematical Reflections)

18. feladat Legyen $p = 4m - 1$ egy prímszám és legyen x és y olyan relatív prím egészek, hogy $x^2 + y^2 = z^{2m}$ egy alkalmas z egészre. Bizonyítsuk be, hogy $p|xy$. (American Mathematical Monthly)

19. feladat Keressük meg az $x^2 + 4 = y^n$ összes megoldását!

20. feladat Mik a prímek $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ -ben?

21. feladat Mely prímek állnak elő $a^2 + 2b^2$, $a^2 + 3b^2$ alakban?

22. feladat Legyen $p > 3$ prímszám. Mutassuk meg, hogy akkor és csak akkor létezik $x, y \in \mathbb{Z}$, hogy $p = 2x^2 + 3y^2$, ha $x \equiv 5$ vagy $11 \pmod{24}$. (Iran MO 2013)

23. feladat Mely p prímekre lesz megoldható az $x^2 - py^2 = -1$ egyenlet ($\mathbb{Z}$ -ben)?

24. feladat Mutassuk meg, hogy nem igaz a SZAT az alábbiakban: $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

25. feladat Bizonyítsuk be, hogy az Euler(-Eisenstein)-egészekben már van maradékos osztás!

26. feladat Bizonyítsuk be, hogy minden $k > 0$ -hoz létezik olyan $z \in \mathbb{Z}[i]$, hogy minden $a \neq z$, $a \in \mathbb{Z}[i]$ -re, ha $|z - a| < k$, akkor a összetett szám $\mathbb{Z}[i]$ -ben! (Bizonyítsuk be, hogy minden $k > 0$ -hoz választható prím z is!)

27. feladat Oldjuk meg a pozitív egészekben az alábbi egyenletet: $x^2 + 11 = 3^n$.

28. feladat Legyen n egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^2 + xy + y^2 = n$ egyenletnek létezik racionális számokból álló megoldása, akkor létezik egész számokból álló megoldása is! (Kömal A. 283.)

A 17,18,19,27 feladatok az alábbi könyvből vannak: Titu Andreescu, Ion Cucurezeanu, Dorin Andrica: An Introduction to Diophantine Equations