

Komplex számok alkalmazása

Lenger Dániel

Olimpiai Iskola, 2025. október 23-25.

1. Leszámlálás kombinatorika

Jelölés: $\varepsilon_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ egy primitív n -edik egységgyök. Ekkor az összes n -edik egységgyök előáll így: $\varepsilon_n, \varepsilon_n^2, \dots, \varepsilon_n^{n-1}, \varepsilon_n^n = 1$

0. Az n -edik egységgyökök összege 0, ha $n \geq 2$, és 1, ha $n = 1$.

1. a) $\binom{100}{0} + \binom{100}{1} + \binom{100}{2} + \dots + \binom{100}{100} = ?$

b) $\binom{100}{0} + \binom{100}{2} + \binom{100}{4} + \dots + \binom{100}{100} = ?$

c) $\binom{100}{0} - \binom{100}{2} + \binom{100}{4} - \binom{100}{6} + \dots + \binom{100}{100} = ?$

d) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots \pm \binom{n}{2\lfloor n/2 \rfloor} = ?$

e) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots + \binom{n}{4\lfloor n/4 \rfloor} = ?$

f) $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \dots + \binom{n}{4\lfloor (n-1)/4 \rfloor + 1} = ?$

g) $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots + \binom{n}{3\lfloor n/3 \rfloor} = ?$

h) $\binom{n}{0} + \binom{n}{k} + \binom{n}{2k} + \dots + \binom{n}{k\lfloor n/k \rfloor} = ?$

2. Az $1, 2, \dots, n$ számok közül p pirosra, s sárgára van színezve ($p + s = n$). Hány olyan egyszínű (a, b, c) hármas van, ahol $n \mid a + b + c$?

3. Legyen p egy páratlan szám. Színezzük ki a $0, 1, \dots, p-1$ számokat két színnel (sárga és zöld). Legyen $1 \leq i \leq p$ esetén x_i a $\{0, 1, \dots, p-1\}$ halmaz egy véletlenszerűen választott eleme (egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenek a választások). Igazoljuk, hogy legalább $2/(2^p p)$ annak a valószínűsége, hogy $x_1, \dots, x_p$ egyforma színűek és $p \mid x_1 + \dots + x_p$.

4. Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, \dots, 1000\}$ halmaznak, amelyben az elemek összege osztható 5-tel?

5. 17 munkás áll egy sorban. Bármely néhány (legalább 2) egymás mellett álló munkásból álló csoportot *brigádnak* nevezzük. Az üzemvezető szeretne minden brigádnak kinevezni egy vezetőt (aki a brigád tagja) úgy, hogy minden munkás kinevezéseinek a száma osztható legyen 4-gyel. Bizonyítsd be, hogy 17-tel osztható annak a száma, ahányféleképpen ezt megteheti.

2. Egyéb kombinatorika

6. Legyen p prím, és legyenek $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ egész számok. Bizonyítsd be, hogy

$$a_0 + a_1 \varepsilon_p + a_2 \varepsilon_p^2 + \dots + a_{p-1} \varepsilon_p^{p-1} = 0$$

pontosan akkor, ha

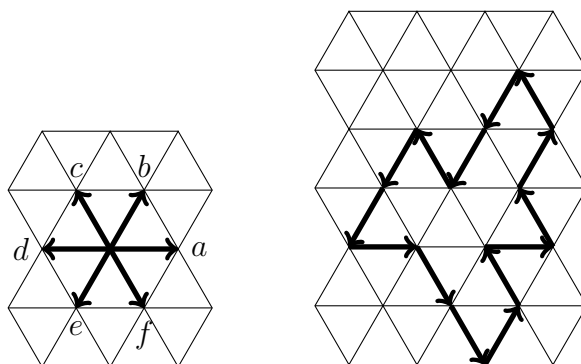
$$a_0 = a_1 = \dots = a_n.$$

7. Legyen A, B, C három rögzített pont a síkon. Egy ember egy P_0 pontból indul, és egyenesen A -ba megy. A -ban balra 60° -kal elfordul, és úgy halad P_1 -be, hogy $P_0A = AP_1$. Ugyanezt a műveletet egymás után 2025-ször hajtja végre sorban az $A, B, C, A, B, C, \dots$ pontok körül, végül visszajut a kiindulási ponthoz. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög egy pozitív körüljárású szabályos háromszög.

8. Mi a lehető legkisebb pozitív egész n számra, melyre az $n \times n$ -es négyzet feldarabolható 40×40 -es és 49×49 -es négyzetekre úgy, hogy mindkét fajta szerepel is a felbontásban.

9. Tekintsük azt a szabályos háromszögrácsot, amelyet a $(0, 0)$, $(1, 0)$ és $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ koordinátájú pontok által meghatározott háromszög generál. Egy szöcske a rácson ugrál, a kezdőpontja az origó. Minden ugrásnál egy szomszédos rácspontba lép, és végül visszatér az origóba. Jelölje a az ugrások számát a pozitív x -tengely irányába, és hasonlóan b, c, d, e, f jelölje az ugrások számát a többi irányba az óramutató járásával ellentétes sorrendben (lásd a 1. ábrát). Bizonyítsd be, hogy teljesül:

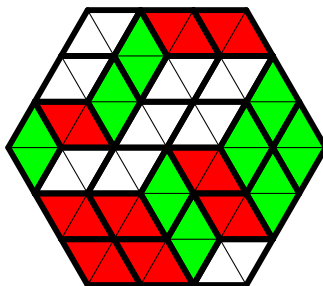
$$a - d = e - b = c - f.$$



1. ábra. A 6 irány, és egy lehetséges útvonal, ahol $a = 2, b = 2, c = 4, d = 0, e = 4, f = 2$.

10. Adott egy téglatest alakú doboz, továbbá adottak $1 \times 2 \times 4$ -es téglák. Tudjuk, hogy a doboz kitölthető ilyen téglákkal hézagmentesen. Bizonyítsd be, hogy a doboz úgy is kitölthető ilyen téglákkal, hogy minden téglát azonos tájolású legyen (azaz az összes 1 hosszúságú él egymással párhuzamos, és az összes 2 hosszúságú él is egymással párhuzamos legyen).

11. Tekintsünk egy egység oldalú szabályos háromszögrácsot, és jelöljük ki rajta egy n oldal-hosszúságú szabályos hatszöget. Nevezzünk *kisrombusznak* egy egység oldalú rácsrombuszt ezen a rácson. Vegyük a hatszög egy csempézését ilyen kisrombuszokkal, és számoljuk meg, hány rombusz van a három lehetséges tájolás mindegyikében. Bizonyítsd be, hogy a három különböző tájoláshoz tartozó rombuszok száma egyenlő. (Lásd a 2. ábrát egy példára, ahol $n = 3$, és mindhárom tájolású rombuszból 9 darab van.)



2. ábra. Egy lehetséges csempézés kisrombuszokkal $n = 3$ esetén.

3. Polinomok

12. Legyen $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ egy olyan valós együtthatós polinom, amelynek minden gyöke valós. Bizonyítsd be, hogy ha $|f(i)| = 1$, akkor $a = b = c = d = 0$.
13. Legyen $f(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ egy olyan valós együtthatós polinom, amelynek gyökei $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Bizonyítsd be, hogy

$$\prod_{k=1}^6 (x_k^2 + 1) = (2a - c)^2.$$

14. Definiáljuk a $P_n(x)$ polinomokat a következőképpen: $P_1(x) = x^2 - 2$, és ha $k \geq 2$ egész, akkor $P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x))$. Bizonyítsd be, hogy bármely pozitív egész n esetén a $P_n(x) = x$ egyenletnek minden gyöke valós és egyszeres.
15. Add meg az összes olyan valós együtthatós $f(x)$ polinomot, amelyre teljesül, hogy

$$f(x)f(2x^2) = f(2x^3 + x).$$

4. Trigonometria

16. Bizonyítsd be, hogy

$$\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}.$$

17. Határozd meg az alábbi szorzat értékét:

$$\cos(20^\circ) \cdot \cos(40^\circ) \cdot \cos(80^\circ).$$

18. Legyenek x, y, z olyan valós számok, melyekre

$$\sin(x) + \sin(y) + \sin(z) = 0 \quad \text{és} \quad \cos(x) + \cos(y) + \cos(z) = 0.$$

Bizonyítsd be, hogy

$$\sin(2x) + \sin(2y) + \sin(2z) = 0 \quad \text{és} \quad \cos(2x) + \cos(2y) + \cos(2z) = 0.$$

19. Bizonyítsd be, hogy

$$\cos^2(10^\circ) + \cos^2(50^\circ) + \cos^2(70^\circ) = \frac{3}{2}.$$

20. Add meg azon x valós számokat, melyekre teljesül, hogy

$$\cos(x) + \cos(2x) - \cos(3x) = 1.$$

5. Soxögek

21. Legyen $ABCDEF$ egy olyan konvex hatszög, melyre $FAB\angle + BCD\angle + DEF\angle = 360^\circ$, és $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$. Bizonyítsd be, hogy

$$AB \cdot FC \cdot EC = BF \cdot DE \cdot FA$$

22. Legyenek $z_1, z_2, \dots, z_n$ páronként különböző 1 hosszú komplex számok. A következő két állítás közül valamelyikből következik-e a másik?

(i) $z_1, z_2, \dots, z_n$ egy szabályos n -szög csúcsai.

(ii) $z_1^n + z_2^n + \dots + z_n^n = n(-1)^{n+1} z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n$

23. Legyen $ABCD$ egy négyzet, és P egy pont a körülírt körén. Legyen

$$S_n(P) = PA^n + PB^n + PC^n + PD^n.$$

Határozd meg az összes n pozitív egész számot, melyre az $S_n(P)$ érték független P választásától.

24. Legyen $n > 2$ egész szám, és $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $A_1 A_2 \dots A_n$ szabályos n -szög esetén

$$f(A_1) + f(A_2) + \dots + f(A_n) = 0.$$

Mutasd meg, hogy f a konstans 0 függvény.

6. Egyéb

25. Bizonyítsd be, hogy

$$z = \frac{2+i}{2-i}$$

hiába 1 hosszú, mégsem egységgyök.