

Komplex számok

2025. október 23-24., Gyenes Zoltán (gyeneszoltan@fazekas.hu)

A komplex számok definíciója

A komplex számok alaphalmaza a valós számpárok halmaza. Ezen a halmazon értelmezzük az összeadást és a szorzást a következő módon: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ és $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. A komplex számok halmazában a $(0, 1)$ elemet hagyományosan i -vel jelöljük: a definíció alapján világos, hogy $i^2 = -1$. Ezek alapján az (a, b) komplex számot hagyományosan $a + bi$ alakban szokták felírni. Ezzel a jelöléssel a műveletek az $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ és az $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ alakot öltik. Vegyük észre, hogy ez éppen annak felel meg, hogy a szorzást a szokásos zárójelfelbontási szabály alapján végezzük, és i^2 helyett -1 -et írunk. Lehet ellenőrizni, hogy ez a két művelet teljesíti a szokásos műveleti szabályokat (az összeadás és a szorzás is kommutatív és asszociatív, illetve teljesül a zárójelfelbontási szabály, van nullelem (a $(0, 0)$) és egységelem (az $(1, 0)$)), azaz a komplex számok kommutatív gyűrűt alkotnak. Mint látni fogjuk, ennél több is igaz: osztani is lehet a nemnulla komplex számokkal, azaz testet is alkotnak.

Feladatok

Műveleti tulajdonságok

F/1. Bizonyítsd be, hogy a komplex számok gyűrűje nullosztómentes: azaz ha két komplex szám szorzata 0, akkor valamelyik szorzótényező is 0.

F/2. Bizonyítsd be, hogy a nemnulla komplex számokkal lehet osztani: azaz ha $(a, b) \neq (0, 0)$, akkor tetszőleges (c, d) számok esetén egyértelműen léteznek x, y valós számok, melyekre teljesül, hogy

$$(a + bi)(x + yi) = c + di.$$

Ez azt jelenti, hogy a racionális és a valós számok halmazához hasonlóan a komplex számok is testet alkotnak.

Négyzetgyökvonás és köbgyökvonás

F/3. Keresd meg az összes z komplex számot, melyre teljesül, hogy $z^2 = -1$.

F/4. Bizonyítsd be, hogy tetszőlegez nem nulla z komplex szám esetén pontosan két w komplex szám létezik, melyre $w^2 = z$.

- F/5.**
- Keresd meg az összes z komplex számot, melyre $z^3 = 1$.
 - Keresd meg az összes komplex számot, melyre $z^3 = -1$.
 - Keresd meg az összes komplex számot, melyre $z^3 = i$.
 - Keresd meg az összes komplex számot, melyre $z^3 = -i$.

Hatványozás

F/6. Keresd szabályosságot az $(1 + i)^n$ hatványoknál (ahol n pozitív egész).

F/7. Keresd szabályosságot a $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$ hatványoknál (ahol n pozitív egész).

- F/8.**
- Keresd zárt formulát a $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$ összegre, ha n osztható 8-cal, illetve ha n nyolcas maradéka 5.
 - Keresd zárt formulát a $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$ összegre, ha n osztható 6-tal, illetve ha n hatos maradéka 4.

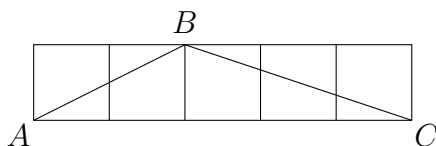
F/9. (Casus Irreducibilis) Írj fel egy egész együtthatós harmadfokú egyenletet, melynek gyöke $r = \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i}$, és határozd meg az összeg pontos értékét.

Konjugálás

- F/10.** A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltja alatt a $\bar{z} = a - bi$ számot értjük.
- Bizonyítsd be, hogy $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
 - Bizonyítsd be, hogy $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
 - Bizonyítsd be, hogy $z \cdot \bar{z} = N(z)$.
 - Mely komplex számokon értelmezett, komplex értékű $f(z)$ függvényekre teljesül, hogy $f(z + w) = f(z) + f(w)$ és $f(zw) = f(z)f(w)$?
- F/11.** Bizonyítsd be, hogy ha a zw szorzat valós, és $z \neq 0$, akkor létezik olyan valós λ , melyre $w = \lambda \cdot \bar{z}$.
- F/12.** Bizonyítsd be, hogy ha p valós együtthatós polinom, akkor ha $p(z) = 0$, akkor $p(\bar{z}) = 0$ is igaz.
- F/13.** Bizonyítsd be, hogy minden valós együtthatós polinom felbontható legfeljebb másodfokú való együtthatós polinomok szorzatára (ehhez szükséged lesz az algebra alaptételére: minden komplex együtthatós polinomnak létezik komplex gyöke).
- F/14.** Bizonyítsd be, hogy ha egy valós együtthatós polinomnak minden valós helyen nemnegatív az értéke, akkor felbontható két valós együtthatós polinom négyzetének az összegére.

A komplex számsík

- F/15.** Mivel minden komplex számot egy valós számpár ír le, így ábrázolhatjuk őket a sík pontjaiként. Milyen geometria transzformációt írnak le az alábbi, komplex számokon értelmezett függvények?
- $p(z) = iz$
 - $q(z) = (1 + i)z$
 - $r(z) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}z$
 - $s(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$
- F/16.** $N(z)$ jelöli a z komplex szám hossz négyzetét (ha a komplex számra vektorként gondolunk, amely a 0 pontból a z -nek megfelelő pontba mutat), azaz $N(a + bi) = a^2 + b^2$ (ezt a komplex szám normájának nevezzük). Bizonyítsd be, hogy $N(zw) = N(z)N(w)$.
- F/17.** $|z|$ a z komplex szám hosszát jelöli (azaz $|z| = \sqrt{N(z)}$). Bizonyítsd be, hogy $|z + w| \leq |z| + |w|$.
- F/18.** $\arg(z)$ jelöli az 1-be és a z -be mutató vektorok által bezárt irányított szöget (pl. $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(-1) = \pi$ és $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$). Bizonyítsd be, hogy $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$. Mi a helyzet $\arg z/w$ -vel? És $\arg \sqrt{z}$ -vel?
- F/19.** Határozd meg a komplex gyökvonás segítségével $\sin 15^\circ$ és $\cos 15^\circ$ pontos értékét.
- F/20.** Bizonyítsd be a trigonometrikus függvények addíciós képleteit a komplex számok segítségével: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ és $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.
- F/21.** (Klasszikus feladat, oldd meg komplex számok segítségével.) Mekkora az ábrán látható ABC szög? (Az ábra öt egységnyi oldalból áll.) Tudsz hasonló feladatokat gyártani?



- F/22.** Bizonyítsd be, hogy minden nemnulla komplex z számhoz pontosan n darab w komplex szám létezik, melyre $w^n = z$. Milyen alakzatot alkotnak a kapott w komplex számok?
- F/23.** Bizonyítsd be, hogy ha az a és a b egész számok felírhatók két négyzetszám összegeként, akkor $a \cdot b$ is felírható két négyzetszám összegeként.

Komplex egységgyökök

- F/24.** Azokat a komplex számokat, melyekre $z^n = 1$ teljesül, n -ik egységgyököknek nevezzük. Bizonyítsd be, hogy $z \neq 1$ n -ik egységgyök, akkor $1 + z + \dots + z^{n-1} = 0$.
- F/25.** Legyen $A_1 A_2 \dots A_n$ egy szabályos n -szög az egységkörön, P pedig egy tetszőleges pont az egységkör lapon. Bizonyítsd be, hogy $PA_1 \cdot PA_2 \cdot \dots \cdot PA_n \leq 2$. Mikor áll fenn az egyenlőség?
- F/26.** Legyen $p \geq 3$ egy prímszám. Bizonyítsd be, hogy ha egy p -szögnek minden szöge egyenlő és minden oldala egész hosszúságú, akkor a sokszög szabályos.

Vegyes lekötő feladatok

- F/27.** Bizonyítsd be, hogy a z_1, z_2 és z_3 komplex számok akkor és csak akkor teljesítik a $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$ egyenlőséget, ha $z_1 = z_2 = z_3$, vagy a három komplex szám szabályos háromszöget alkot a komplex számsíkon.
- F/28.** a. Bizonyítsd be, hogy ha $|z| = |w| \neq 0$ és $z^2 \neq w^2$, akkor a $0, z, w$ és $\frac{2zw}{z+w}$ (z és w harmonikus közepe) komplex számoknak megfelelő pontok húrdeltoidot alkotnak.
b. Bizonyítsd be, hogy ha z és w nem nulla komplex számok és $z^2 \neq w^2$, akkor a $0, z, w$ és $\frac{2zw}{z+w}$ komplex számoknak megfelelő pontok egy körre vagy egy egyenesre esnek.
- F/29.** Bizonyítsd be, hogy az egymástól különböző a, b, c és d komplex számok akkor és csak akkor vannak egy körön vagy egy egyenesen, ha $\frac{(a-c)(d-b)}{(a-d)(c-b)}$ valós.
- F/30.** Bizonyítsd be a Ptolemaiosz-egyenlőtlenséget a komplex számok segítségével: tetszőleges A, B, C és D pontok esetén $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$. Bizonyítsd be a Ptolemaiosz-tételt is: ha A, B, C és D egy körre esnek (ebben a sorrendben), akkor teljesül az egyenlőség.
- F/31.** Legyenek az a és b komplex számok a komplex egységkörön, z pedig tetszőleges (a nekik megfelelő síkbeli pontokat A, B és Z jelöli). Bizonyítsd be, hogy a Z pontból az AB húrra állított merőleges talppontja $t = \frac{1}{2}(a + b + z - ab\bar{z})$.
- F/32.** Legyenek az a, b, c és d komplex számok az egységkörön. Bizonyítsd be, hogy az AB és a CD húr metszéspontja
- $$m = \frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$$
- F/33.** (Kürschák verseny, 2000/2) Legyen ABC nem szabályos háromszög, és legyen ω a körülírt köre. A sík egy tetszőleges P pontjára legyen a PA, PB és PC egyenes második metszéspontja a körrel A', B' és C' . Bizonyítsd be, hogy pontosan két olyan P pont létezik a síkban, melyre $A'B'C'$ szabályos, és ez a két pont és az ω középpontja egy egyenesre esik.