

Olimpiai szakkör 2025. szeptember 19.

1. Tekintsünk négy pontot úgy, hogy ezek nincsenek mind egy síkban. Hány olyan sík van, amely mind a négy ponttól ugyanolyan távol van?
2. Igazoljuk, hogy 100 egész szám között biztosan van néhány, amelyek összege osztható 100-zal.
3. Jelöljük egy tetszőleges ABC háromszög szögeit rendre α -val, β -val, illetve γ -val. Az AB oldal felező merőlegese messe a BC oldalt vagy annak meghosszabbítását az X pontban, az AC oldal felező merőlegese pedig ugyanezt az egyenest az Y pontban. Bizonyítsuk be, hogy a $BC = XY$ teljesülésének elegendő feltétele: $\tan \beta \cdot \tan \gamma = 3$. Bizonyítsuk be, hogy ez a feltétel nem szükséges, és adjuk meg a $BC = XY$ teljesülésének szükséges és elegendő feltételét.
4. Tekintsük az 1, 2, ..., 100 számokat és ezeknek egy H részhalmazát. Legalább hány eleme kell legyen H-nak, ha az elemek ismerete nélkül mégis biztosan kijelenthető, hogy van köztük kettő, melyek relatív prímek? És ha a feltétel: a kisebb osztja a nagyobbat?
5. Legyen az Ω illetve Γ körök középpontja rendre M illetve N. Tegyük fel, hogy Ω sugara kisebb, mint Γ sugara, valamint hogy Ω és Γ a (különböző) A és B pontokban metszik egymást. Az MN egyenes Ω -t a C pontban, Γ -t pedig a D pontban metszi olyan módon, hogy C, M, N és D ebben a sorrendben követik egymást az egyenesen. Jelölje P az ACD háromszög körülírt körének a középpontját. Messe az AP egyenes Ω -t az $E \neq A$ pontban. Messe az AP egyenes Γ -t az $F \neq A$ pontban. Legyen H a PMN háromszög magasságpontja. Bizonyítsuk be, hogy a H-n átmenő, AP -vel párhuzamos egyenes érinti a BEF háromszög körülírt körét.
6. Igaz-e, hogy minden pozitív egész n számnak van olyan többszöröse, amelyben a jegyek összege n?
7. Mely n természetes számokra érvényes a következő állítás: a körbe írható $A_1A_2 \dots A_{2n-1}A_{2n}$ konvex sokszögnél az $(A_1A_2; A_{n+1}A_{n+2})$, $(A_2A_3; A_{n+2}A_{n+3})$, ..., $(A_{n-1}A_n; A_{2n-1}A_{2n})$ szemközti oldalpárok párhuzamosságából következik az $(A_nA_{n+1}; A_{2n}A_1)$ oldalpár párhuzamossága?
8. Adjuk meg pozitív egészek olyan hét elemű sorozatát, amelyben akkor lesz két szám relatív prím, ha a sorozat szomszédos elemei! Megadható-e végtelen hosszú sorozat ugyanezzel a tulajdonsággal?
9. Pozitív egészek egy halmazát nevezzük „összegosztósnak”, ha a halmaz minden eleme osztja az összes elem összegét. Igazoljuk, hogy a pozitív egészek tetszőleges véges részhalmaza kiegészíthető néhány számmal összegosztóssá.