



Kombinatorika

Németh Márton Tamás

marcipan5000@gmail.com

Szakkör dátuma: 2025. szeptember 12.

1. Mirsky és Dilworth

1.1. Probléma. (BMO 2011) Adott $S \subset \mathbb{N}^+$ a pozitív egészek egy részhalmaza, melyre teljesül, hogy ha $s \in S$, akkor s összes pozitív osztója is benne van S -ben. A halmaz egy $A \subset S$ részhalmazát nevezzük jónak, ha bármely $x, y \in A$ esetén (ahol $x > y$) x és y hányadosa prímszám. S egy $B \subset S$ részhalmazát nevezzük rossznak, ha bármely két különböző $x, y \in B$ érték esetén x és y hányadosa nem prímszám (az egyelemű halmaz jó és rossz is). Bizonyítsuk be, hogy a legkisebb k érték, melyre S felbomlik k darab rossz halmaz diszjunkt uniójára egyenlő S legnagyobb jó részhalmazának méretével.

1.2. Probléma. Legyen $n, m \geq 2$ pozitív egészek. Határozzuk meg a legkisebb k értéket (m és n függvényében), melyre egy k csúcsú egyszerű gráfban biztosan van n hosszú út, vagy m csúcsú független halmaz.

1.3. Definíció. Legyen S egy tetszőleges halmaz, és $\leq$ egy reláció S elemein. Ekkor az $(S, \leq)$ párt egy részbenrendezésnek nevezzük, ha a relációra teljesülnek a következő tulajdonságok:

- Reflexív: minden $x \in S$ esetén $x \leq x$.
- Antiszimmetrikus: ha $x \leq y$ és $y \leq x$ akkor $x = y$.
- Tranzitív: ha $x \leq y$ és $y \leq z$ akkor $x \leq z$.

Előfordulhat, hogy sem $x \leq y$, sem $y \leq x$ nem teljesül, ekkor azt mondjuk, hogy x és y nem összehasonlítható.

1.4. Definíció. Legyen $(S, \leq)$ egy részbenrendezés. Ekkor egy $L \subset S$ részhalmazt láncnak nevezzük, ha L bármely két eleme összehasonlítható. Hasonlóan egy $A \subset S$ részhalmazt antiláncnak nevezzük, ha A semely két különböző eleme nem összehasonlítható.

1.5. Tétel. (Mirsky) Legyen $(S, \leq)$ egy részbenrendezés, ahol S véges. Ekkor a leghosszabb lánc hossza S -ben egyenlő a legkisebb olyan k értékkel, melyre S felbomlik k darab antilánc diszjunkt uniójára.

1.6. Tétel. (Dilworth) Legyen $(S, \leq)$ egy részbenrendezés, ahol S véges. Ekkor a legnagyobb antilánc mérete egyenlő a legkisebb olyan k értékkel, melyre S felbomlik k darab lánc diszjunkt uniójára.

1.7. Tétel. (Erdős-Szekeres) Bármely $(S, \leq)$ részbenrendezés esetén, ahol $|S| \geq rs + 1$, létezik $r + 1$ hosszú lánc vagy $s + 1$ méretű antilánc.

A tételt a valósakra, egy teljes rendezéssel alkalmazva visszakapjuk az Erdős-Szekeres tétel jobban ismert verzióját.

1.8. Példafeladat. (Dragomir Grozev) Egy országban n város van, melyek 1-től n -ig vannak számozva, ezek közül néhány össze van kötve egyirányú utakkal. k -sétának hívjuk városok egy olyan k hosszú sorozatát, melyben a sorozat egy tagjából a következőbe irányított út megy, és a sorozatban a városok számozása szigorúan növekvő vagy szigorúan csökkenő. Tudjuk, hogy az országban nem létezik k -séta. Bizonyítsuk be, hogy be lehet osztani a városokat $(k-1)^2$ csoportba úgy, hogy egy csoporton belül semely két város között ne haladjon irányított út.

1.9. Példafeladat. (Iran MO 2006) A csillagos égbolton n csillag mindegyike egy bizonyos zárt időintervallumban látható. Tudjuk, hogy bármely k csillag közül kiválasztható kettő, melyek látszanak valamikor egyszerre. Legalább hányszor kell tudnia a kameránknak fényképezni, hogy biztosan lencsevégre kaphassuk az összes csillagot legalább egyszer?

1.10. Probléma. (Kürschák 2020) Egy városban N ház van. Téliapó minden karácsonykor végigjárja a házakat valamilyen sorrendben. Mutassuk meg, hogy ha N elég nagy, akkor teljesül, hogy három egymást követő évben mindig található 13 olyan ház, amit (a három közül) két évben is ugyanabban a sorrendben látogatott meg. Határozzuk meg a legkisebb N számot, melyre ez fennáll.

1.11. Probléma. (China TST 2023) Adott egy ABC háromszög a síkon, és a belsejében a $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontok úgy, hogy semely három jelölt pont nem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy fel tudjuk bontani az ABC háromszöget $2n+1$ kisebb háromszögre úgy, hogy a csúcsaik az $A, B, C, P_1, P_2, \dots, P_n$ pontok közül kerüljenek ki, és közülük legalább $n + \sqrt{n} + 1$ háromszögnek legyen csúcsa A, B vagy C közül legalább egy.

1.12. Probléma. (Sperner-Lubell) Legfeljebb hány részhalmaza sorolható fel az $\{1, 2, \dots, n\}$ -nek úgy, hogy semelyik ne legyen semelyik másiknak részhalmaza?

1.13. Probléma. (Serbia TST 2023) Adott a síkon n^2 fal, melyek közül semely kettő nem párhuzamos és nem metsző. Bizonyítsuk be, hogy létezik a síkon n pont, melyek közül semely kettő nem látja egymást (a falak zárt szakaszok, két pont látja egymást, ha az őket összekötő szakaszt nem metszi egyik fal sem).

1.14. Probléma. (Cheng Jiang, Tianqin Li) Tetszőleges p prím és $1 \leq a \leq p-1$ egész esetén $(a^{-1} \bmod p)$ jelölje azt az $1 \leq m \leq p-1$ egészt, melyre $p \mid am-1$. Legyen k fix pozitív egész, és $p > 100k^2$ prímszám. Bizonyítsuk, hogy léteznek olyan $x_1, x_2, \dots, x_k$ pozitív egészek, melyekre

- $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq p-1$ és
- $(x_1^{-1} \bmod p) > (x_2^{-1} \bmod p) > \dots > (x_k^{-1} \bmod p)$.

1.15. Probléma. (Ukrainian MO 2024) Tetszőleges $a_1, a_2, \dots, a_k$ valós számok *királyi átlagának* hívjuk a

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k+1}$$

kifejezés értékét. Bizonyítsuk be, hogy bármely valós $b_1, b_2, \dots, b_{2025}$ valósak esetén létezik 45 olyan (i, j) pár (ahol $i \leq j$), hogy a $b_i, b_{i+1}, \dots, b_j$ számok királyi átlaga bármely két választott (i, j) pár esetén különbözik.

1.16. Probléma. Egy osztályban n tanuló van, akik a jövő héten egymás után felelni fognak. A sorrendet az osztályfőnök már előre eldöntötte, viszont nem közölte a diákokkal. Amikor egyszerre odamegy hozzá d diák (ahol d értéke fix), akkor az osztályfőnök elmondja, hogy közülük ki felel először, vagy hogy ki felel utoljára (és azt is, hogy melyik eset áll fenn). A diákok akárhány küldöttséget küldhetnek. Határozzuk meg (n és d függvényében) a legnagyobb k értéket, melyre az osztály biztosan meg tudja határozni k tanuló egymáshoz viszonyított felelési sorrendjét.

1.17. Probléma. Legyen $n \geq 8$ pozitív egész. Határozzuk meg a legkisebb olyan k értéket (n függvényében), melyre teljesül, hogy bármely n csúcsú, k éllel rendelkező egyszerű gráfban található két kör, melyek élei diszjunktak.

1.18. Probléma. Jelölje $\mathcal{F}$ az A és B karakterek véges hosszú sorozatainak halmazát, és legyen $G \subset \mathcal{F}$, melyre teljesül, hogy ha egy X sorozat benne van G -ben, akkor X összes részsorozata is benne van G -ben (vagyis azok a sorozatok, melyek elérhetőek X -ből néhány karakter kitörölésével). Igaz-e, hogy tetszőleges ilyen G mellett létezik olyan véges $F \subset \mathcal{F}$ halmaz, melyre $X \in G$ akkor és csak akkor, ha X -nek nincs részsorozata F -ben?

2. IMO feladatok

2.1. Probléma. (IMO 2020) Adott egy $n > 1$ egész szám. Egy hegynak egy lejtőjén n^2 állomás van, csupa különböző magasságon. Két felvonótársaság, A és B mindegyike k felvonót üzemeltet; mindegyik felvonóval egy állomásról egy magasabban lévő állomásra lehet eljutni (közbusz megállás nélkül). Az A társaság k felvonójának k különböző kezdőpontja és k különböző végpontja van, és magasabbról induló felvonó magasabbra is érkezik. Ugyanezek igazak a B -re. Azt mondjuk, hogy egy felvonótársaság *összeköt* két állomást, ha a lejjebb állomásról indulva el lehet jutni a feljebbire az adott társaság egy vagy több felvonóját használva (nincs megengedve semmilyen más mozgás az állomások között). Határozzuk meg a legkisebb olyan pozitív egész k számot, amelyre biztosak lehetünk abban, hogy van két állomás, amelyet mindkét felvonótársaság összeköt.

2.2. Probléma. (IMO 2023) Legyen n egy pozitív egész. Egy *japán háromszög* $1 + 2 + \dots + n$ körből áll, szabályos háromszög alakban elrendezve úgy, hogy minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén az i -edik sor pontosan i kört tartalmaz, melyek közül pontosan egy piros színű. *Nindzsa-útnak* nevezzük egy n körből álló sorozatot, mely a legfelső sorból indul, egy kört a közvetlenül alatta lévő két kör valamelyike követ, és a legalsó sorban végződik. Határozzuk meg a legnagyobb k értéket (n függvényében), melyre fennáll, hogy minden japán háromszögben található olyan nindzsa-út, ami legalább k piros kört tartalmaz.

2.3. Probléma. (IMO 2025) Vegyünk egy 2025×2025 egységnégyzetből álló négyzetrácsot. Matild téglalap alakú csempéket helyez a rácsra (melyek mérete eltérő lehet) úgy, hogy a csempék oldalai a rácsegyenesekre esnek illetve minden egységnégyzetet legfeljebb egy csempe fed. Határozzuk meg, legkevesebb hány csempét kell Matildnak leraknia ahhoz, hogy a rács minden sorában és minden oszlopában pontosan egy egységnégyzetet ne fedjen csempe.

2.4. Probléma. (IMO Shortlist 2010) Egy koncerten 20 fellépő fog énekelni egymás után. Mind a 20 fellépő előre meghatározta a többi énekes egy részhalmazát, akik után szeretne fellépni. Lehetséges-e, hogy a fellépők éppen 2010 féle sorrendben szerepelhetnek úgy, hogy mindegyikük kívánsága teljesüljön?