2025. július 15., kedd

1. feladat Egy síkbeli egyenest *napfényes*nek nevezünk, ha **nem** párhuzamos sem az x-tengellyel, sem az y-tengellyel, sem pedig az $x + y = 0$ egyenessel.

Adott egy $n \geqslant 3$ egész szám. Határozzuk meg az összes k nemnegatív egész számot, melyre létezik n különböző egyenes a síkon az alábbi tulajdonságokkal:

- ha a és b pozitív egészekre $a + b \leqslant n + 1$ teljesül, akkor az (a, b) pont rajta van legalább egy egyenesen; valamint
- az n egyenes közül pontosan k napfényes.

2. feladat Legyen az Ω illetve Γ körök középpontja rendre M illetve N. Tegyük fel, hogy Ω sugara kisebb, mint Γ sugara, valamint hogy Ω és Γ a (különböző) A és B pontokban metszik egymást. Az MN egyenes Ω-t a C pontban, Γ-t pedig a D pontban metszi olyan módon, hogy C, M, N és D ebben a sorrendben követik egymást az egyenesen. Jelölje P az ACD háromszög körülírt körének a középpontját. Messe az AP egyenes Ω-t az $E \neq A$ pontban. Messe az AP egyenes Γ-t az $F \neq A$ pontban. Legyen H a PMN háromszög magasságpontja.

Bizonyítsuk be, hogy a H-n átmenő, AP-vel párhuzamos egyenes érinti a BEF háromszög körülírt körét.

(Egy háromszög *magasságpontja* a magasságvonalainak metszéspontja.)

3. feladat Jelölje $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmazát. Egy $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt *pöpec*nek nevezünk, ha

$$b^a - f(b)^{f(a)} \text{ osztható } f(a)\text{-val}$$

tetszőleges a és b pozitív egész számok esetén.

Határozzuk meg a legkisebb c valós konstanst, melyre $f(n) \leqslant cn$ fennáll minden f pöpec függvényre és minden n pozitív egészre.

2025. július 16., szerda

4. feladat Egy N pozitív egész *szigorú osztói* alatt az N-nél kisebb pozitív osztóit értjük.

Az $a_1, a_2, \ldots$ végtelen sorozat olyan pozitív egészekből áll, melyek mindegyikének legalább három szigorú osztója van. Minden $n \geqslant 1$ esetén a_{n+1} megegyezik a_n három legnagyobb szigorú osztójának összegével.

Határozzuk meg a_1 összes lehetséges értékét.

5. feladat Hanga és Ábel egy kétszemélyes játékot játszanak, amelynek a szabályai egy λ pozitív valós számtól függenek, melyet mindkét játékos ismer. Az n-edik lépésben ($n = 1$-gyel kezdődően) a következő történik.

- Ha n páratlan, Hanga választ egy x_n nemnegatív valós számot úgy, hogy

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Ha n páros, Ábel választ egy x_n nemnegatív valós számot úgy, hogy

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Ha valamelyik játékos nem tud megfelelő x_n számot választani, a játék véget ér és a másik játékos nyer. Ha a játék örökké tart, egyik játékos sem nyer. A választott számok mindkét játékos számára ismertek.

Határozzuk meg az összes olyan λ számot, melyre Hangának nyerő stratégiája van, valamint az összes olyat, melyre Ábelnek nyerő stratégiája van.

6. feladat Vegyünk egy 2025×2025 egységnégyzetből álló négyzetrácsot. Matild téglalap alakú csempéket helyez a rácsra (melyek mérete eltérő lehet) úgy, hogy a csempék oldalai a rácsegyenesekre esnek illetve minden egységnégyzetet legfeljebb egy csempe fed.

Határozzuk meg, legkevesebb hány csempét kell Matildnak leraknia ahhoz, hogy a rács minden sorában és minden oszlopában pontosan egy egységnégyzetet ne fedjen csempe.