



2025. április 13. vasárnap

Feladat 1. Egy pozitív egész N -re legyenek $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ azok az N -nél kisebb pozitív egészek, amik relatív prímek N -hez. Keressük meg az összes $N \geq 3$ számot, melyre

$$\text{luko}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

minden $1 \leq i \leq m - 1$ -re.

Az $\text{luko}(a, b)$ az a legnagyobb pozitív egész szám, ami osztja a -t és b -t. Az a és b egészek relatív prímek, ha $\text{luko}(a, b) = 1$.

Feladat 2. Pozitív egészek végtelen, monoton növekvő $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ sorozatát *centrálisnak* hívunk, ha minden pozitív egész n esetén a sorozat első a_n tagjának átlaga egyenlő a_n -nel.

Mutassuk meg, hogy létezik egy pozitív egészekből álló, végtelen $b_1, b_2, b_3, \dots$ sorozat úgy, hogy minden $a_1, a_2, a_3, \dots$ centrális sorozatra végtelen sok olyan pozitív egész n van, melyre $a_n = b_n$.

Feladat 3. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, a B, D, E , és C pontok egy egyenesre esnek ebben a sorrendben úgy, hogy $BD = DE = EC$. Az AD és AE szakaszok felezőpontjai legyenek rendre M és N . Tegyük fel, hogy az ADE háromszög hegyesszögű, és legyen H a magasságpontja. Legyenek a P és Q pontok rendre a BM illetve CN egyeneseken úgy, hogy D, H, M , és P páronként különbözőek és egy körön helyezkednek el, valamint E, H, N , és Q páronként különbözőek és egy körön helyezkednek el. Bizonyítsuk be, hogy P, Q, N , és M egy körön helyezkednek el.

Egy háromszög magasságpontja a magasságvonalainak a metszéspontja.



2025. április 14. hétfő

Feladat 4. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amire $AB \neq AC$, a beírt körének középpontját jelölje I . A BI és CI egyenesek az ABC háromszög körülírt körét rendre a $P \neq B$ illetve $Q \neq C$ pontokban metszik. Az R és S pontokat vegyük fel úgy, hogy $AQRB$ és $ACSP$ paralelogrammák legyenek (úgy, hogy $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$, és $AP \parallel CS$). Legyen T az RB és SC egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy R , S , T , és I egy körön helyezkednek el.

Feladat 5. Legyen $n > 1$ egy egész szám. Egy $n \times n$ -es tábla konfigurációjában az n^2 mező mindegyike tartalmaz egy nyilat, ami vagy felfelé, vagy lefelé, vagy balra, vagy jobbra mutat. Adott kezdő konfigurációra Turbó a csiga a tábla egyik mezőjéből indul és mezőről mezőre lépked. Minden lépésben Turbó egy négyzetnyit lép abban az irányban, amelyre a mezőjében levő nyíl mutat (ezzel lehet, hogy lelép a tábláról). Minden lépés után a nyilak az összes mezőben elfordulnak 90° -kal az óramutató járásával ellenkező irányban. Egy mezőt *jónak* nevezünk, ha abból a mezőből kiindulva Turbó a tábla minden mezőjét pontosan egyszer érinti anélkül, hogy elhagyná a táblát és a végén a kiinduló mezőjébe ér vissza. Határozzuk meg az n függvényében a jó mezők maximális számát az összes lehetséges kezdő konfigurációban.

Feladat 6. Egy 2025×2025 -ös tábla minden mezőjébe egy nemnegatív valós szám van írva úgy, hogy minden sorban a számok összege 1, és minden oszlopban a számok összege 1. Legyen r_i a legnagyobb szám az i -edik sorban, és legyen $R = r_1 + r_2 + \dots + r_{2025}$. Hasonlóan legyen c_i a legnagyobb szám az i -edik oszlopban és legyen $C = c_1 + c_2 + \dots + c_{2025}$.
Mi a lehető legnagyobb értéke $\frac{R}{C}$ -nek?