



Language: **Hungarian**

Day: **1**

2024. április 13. szombat

Feladat 1. Két különböző u és v egész szám fel van írva egy táblára. Elvégezzük lépések egy sorozatát. Minden lépésben az alábbi két művelet egyikét csináljuk:

- (i) Ha a és b különböző egészek amik fent vannak a táblán, akkor felírhatjuk $a + b$ -t a táblára, ha még nincs fent a táblán.
- (ii) Ha a, b és c három különböző egész szám amik fent vannak a táblán, és az x egész számra $ax^2 + bx + c = 0$ teljesül, akkor felírhatjuk x -et a táblára, ha még nincs fent a táblán.

Határozzuk meg az összes olyan kezdő (u, v) számpárt, amiből kiindulva bármely egész szám fel tud kerülni a táblára véges sok lépés után.

Feladat 2. Legyen ABC egy háromszög amiben $AC > AB$, a körülírt körét jelölje Ω , a beírt körének középpontját pedig I . A beírt kör érintse a BC, CA, AB oldalakat rendre a D, E, F pontokban. Az X és Y pontok rendre a beírt kör rövidebbik $\widehat{DF}$ és rövidebbik $\widehat{DE}$ ívén helyezkednek el úgy, hogy $BXD \angle = DYC \angle$. Az XY egyenesnek és a BC egyenesnek a metszéspontja legyen K . Legyen T az a pont az Ω -n, melyre KT érinti Ω -t és a T pont a BC egyenes ugyanazon oldalán helyezkedik el, mint az A pont. Bizonyítsuk be, hogy a TD és AI egyenesek metszéspontja az Ω -n van.

Feladat 3. Egy n pozitív egészet *különösnek* nevezünk, ha az n tetszőleges pozitív d osztójára a $d(d+1)$ egész szám osztja $n(n+1)$ -et. Bizonyítsuk be, hogy bármely négy különböző A, B, C és D különös pozitív egészekre a következő teljesül:

$$\text{lko}(A, B, C, D) = 1.$$

Itt $\text{lko}(A, B, C, D)$ azt a legnagyobb pozitív egészet jelöli, ami A, B, C és D mindegyikét osztja.



Language: **Hungarian**

Day: **2**

2024. április 14. vasárnap

Feladat 4. Egy egészekből álló $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ sorozatban egy (a_i, a_j) párt, ahol $1 \leq i < j \leq n$ *érdekesnek* nevezünk, ha létezik egy egészekből álló (a_k, a_ℓ) pár, ahol $1 \leq k < \ell \leq n$ úgy, hogy

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Minden $n \geq 3$ -ra határozzuk meg az érdekes párok lehetséges legnagyobb számát egy n hosszú sorozatban.

Feladat 5. Jelölje $\mathbb{Z}^+$ a pozitív egészek halmazát. Keressük meg az összes olyan $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ függvényt, ahol tetszőleges (x, y) pozitív egészekből álló számpárra az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

- (i) x és $f(x)$ pozitív osztóinak száma megegyezik.
- (ii) Ha x nem osztja y -t és y nem osztja x -et, akkor

$$\text{luko}(f(x), f(y)) > f(\text{luko}(x, y)).$$

Itt $\text{luko}(m, n)$ az a legnagyobb pozitív egész, ami osztja m -et és n -et is.

Feladat 6. Keressük meg az összes olyan d pozitív egész számot, melyre létezik egy d -edfokú valós együtthatós P polinom, melyre $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ között legfeljebb d különböző érték fordul elő.