

4. Válogatóverseny

2025. április 24.

1. Feladat Határozzuk meg az összes olyan véges $S \neq \emptyset$ halmazt, amely pozitív egészekből áll és amelyre teljesül, hogy tetszőleges $a, b \in S$ elemekhez létezik $c \in S$ úgy, hogy $b + 2c$ osztható a -val.

2. Feladat Legyen n pozitív egész. Egy kerek asztal körül $2n$ lovag ül, akik n párt alkotnak. Ha egy lovag a párja mellett ül, kezét ráznak. Minden lépésben két szomszédos lovag helyet cserél. Határozzuk meg azt a legkisebb m számot, melyre tetszőleges kezdeti ülésrend esetén m lépésben elérhető, hogy minden lovag legalább egyszer kezét rázzon a párjával.
A lovagok az első lépés előtt is kezét ráznak a párjukkal, ha szomszédosak vele.

3. Feladat Legyen $ABCDE$ konvex ötszög, és jelölje az AB oldal felezőpontját M . Tegyük fel, hogy AB érinti a CME háromszög körülírt körét (M -ben), valamint hogy D rajta van az AME illetve BMC háromszögek körülírt körén. Az AD és ME egyenesek K -ban, a BD és MC egyenesek pedig L -ben metszik egymást. Továbbá P és Q olyan pontjai az EC egyenesnek, melyekre $PDC \sphericalangle = EDQ \sphericalangle = ADB \sphericalangle$.

Mutassuk meg, hogy a KP , LQ és MD egyenesek egy ponton mennek át.

Munkaidő: 4 óra 30 perc.

Mindegyik feladat 7 pontot ér.

Az IMO szabályai szerint ezt a feladatsort a 2025-ös IMO végéig, 2025. július 20-ig nem szabad nyilvánossá tenni, az interneten megosztani.