

3. Válogatóverseny

2025. április 23.

1. Feladat Az $ABCD$ húrnégyszögben $AC < BD < AD$ és $\angle DBA < 90^\circ$. Legyen E az a pont a D -n átmenő, AB -vel párhuzamos egyenesen, melyre E és C az AD egyenes különböző oldalán fekszenek, és $AC = DE$. Legyen F az a pont az A -n átmenő, CD -vel párhuzamos egyenesen, melyre F és C az AD egyenes különböző oldalán fekszenek, és $BD = AF$.

Bizonyítsuk be, hogy a BC és EF szakaszok felezőmerőlegesei az $ABCD$ négyszög körülírt körén metszik egymást.

2. Feladat Legyen n pozitív egész. Határozzuk meg a legkisebb lehetséges értékét az

$$S = 2^0 x_0^2 + 2^1 x_1^2 + \cdots + 2^n x_n^2$$

összegnek, ahol $x_0, x_1, \dots, x_n$ olyan nemnegatív egészek, melyekre $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = n$.

3. Feladat Legyen N pozitív egész. Anna és Béla egy játékot játszanak, melyben kezdetben az $1, 2, \dots, N$ számok szerepelnek egy táblán. A két játékos felváltva lép, Anna kezd. Egy lépés abból áll, hogy a játékos kiválaszt egy (k, n) számpárt, ahol $k \geq 0$ egész, és n a táblán még szereplő számok egyike, majd a játékos letöröl minden olyan s számot a tábláról, amire az $n - s$ különbség osztható 2^k -al.

A játék akkor ér véget, amikor a tábla üres lesz. Az veszít, aki utoljára törölt le számot.

Határozzuk meg az összes olyan N értéket, melyre Anna biztosan nyerni tud, függetlenül attól, hogy Béla hogyan játszik.

Munkaidő: 4 óra 30 perc.

Mindegyik feladat 7 pontot ér.

Az IMO szabályai szerint ezt a feladatsort a 2025-ös IMO végéig, 2025. július 20-ig nem szabad nyilvánossá tenni, az interneten megosztani.