

1. Az $1, 2, \dots, n^2$ egészeket szeretnénk egy $n \times n$ -es táblázat mezőibe beírni úgy, hogy minden mezőbe pontosan egy számot írunk és minden számot pontosan egyszer használunk fel. Az n minden d osztója esetén legyen a táblázat d -felosztása az, hogy $d \times d$ méretű részekre bontjuk hézag és átfedés nélkül. A d -felosztásban tehát $(n/d)^2$ darab rész van.

Nevezzük az n értékét jónak, ha $n \geq 4$ és a számok beírását el tudjuk végezni úgy, hogy az n minden d valódi osztóját (amire $1 < d < n$) tekintve, a táblázat d -felosztásában szereplő minden $d \times d$ méretű részben az ide beírt számok összege d -nek nem többszöröse. Határozzuk meg az összes páros jó számot.

2. Határozzuk meg az összes olyan, pozitív egészekből álló $a_1, a_2, \dots$ végtelen sorozatot, amelyre minden pozitív egész $m \leq n$ számpárra az alábbi számtani és mértani közép értéke is egész szám:

$$\frac{a_m + a_{m+1} + \dots + a_n}{n - m + 1}, \quad (a_m a_{m+1} \dots a_n)^{\frac{1}{n-m+1}}.$$

3. Az $ABCD$ négyszögben AB és CD párhuzamos és $AB < CD$. Az AD és BC egyenesek metszéspontja legyen P . Az ABC háromszög köré írt kör $X \neq C$ pontjára $PC = PX$. Az ABD háromszög köré írt kör $Y \neq D$ pontjára $PD = PY$. Legyen az AX és BY egyenesek metszéspontja Q . Igazoljuk, hogy PQ és AB párhuzamosak.