

2024. november 8., péntek

1. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvényt, melyre minden $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ esetén az alábbi két feltétel teljesül:

(a) $f(ab) = f(a) + f(b)$,

(b) $f(a + b) \geq \min(f(a), f(b))$ ha $a + b \neq 0$.

A feladatban $\min(m, n)$ a nem nagyobbik számot jelöli m és n közül.

2. Egy szabályos $4n$ -szög oldalait $2n$ párba soroljuk be úgy, hogy szomszédos oldalak nem alkotnak párt. A $4n$ -szög csúcsain k bábu ugrál. Ha az AB és CD oldalak párt alkotnak, és az AC szakasz párhuzamos a BD szakasszal, akkor a bábuknak szabad A -ból C -be, C -ből A -ba, B -ből D -be, D -ből B -be ugraniuk. Másfajta ugrás tilos. Tegyük fel, hogy a $4n$ -szög minden P csúcsához pontosan egy olyan bábu van, amely el tud jutni P -be. Igazoljuk, hogy k páratlan.
3. Az ABC háromszög körülírt köre ω , a beírt körének középpontja I , annak érintési pontja a BC oldalon T . A D, E pontok a BC oldalon helyezkednek el úgy, hogy $\angle DIC = \angle EIB = 90^\circ$. Az AI egyenes az ω kört S -ben metszi el másodszorra. Továbbá az SD, SE egyenesek ω -t a D', E' pontokban metszik el másodszorra. Jelölje végül a D', E' pontokban ω -hoz húzott érintők metszéspontját K . Igazoljuk, hogy az SK egyenes felezi az IT szakaszt.