

Olimpiai szakkör 2025. április 11.

1. Tekintsük az ABC egyenlő szárú háromszöget, amelyben $AC=BC$. Legyen P az AB alap azon pontja, amelyre teljesül, hogy az APC háromszög beírt k_1 körének sugara ugyanakkora, mint a PBC háromszög PB oldalához hozzáírt k_2 körének a sugara. Mutassuk meg, hogy a k_1 kör AC -vel párhuzamos $e \neq AC$ érintője, valamint a k_2 kör BC -vel párhuzamos $f \neq BC$ érintője a háromszög AB alapján metszik egymást.

2. Egy gráf lerajzolását nevezzük kötésnek, ha bármely két élnek pontosan egy közös pontja van, amely lehet végpont, vagy metszéspont (ez utóbbinál egyik keresztezi a másikat). Rajzoljunk minél több élű kötet, ha a pontok száma 4, 5, 6! Hány pontú kör rajzolható le kötésként?

3. Legyen $H = \{1, 2, \dots, n\}$. Megadható-e két, közös elem nélküli A és B halmaz, melyek uniója éppen H úgy, hogy A elemeinek összege egyenlő B elemeinek szorzatával, ha (a) $n=2016$; (b) $n = 2017$?

4. Az ABC háromszög A -ból induló magasságának talppontja T , a B -ből induló szögfelező az AC oldalt D -ben metszi. Tudjuk, hogy $BDA\angle = 45^\circ$. Mekkora a $DTC\angle$?

5. (a) Igazoljuk, hogy n különböző a_i / b_i alakú (de nem feltétlen különböző értékű) racionális számot kiválasztva a $(0; 1)$ intervallumból, a számok nevezőinek összege legalább $\frac{2\sqrt{2}}{3} n^{\frac{3}{2}}$.

(b) Igazoljuk, hogy ha feltesszük a számokról, hogy különböző értékűek is, akkor a számok nevezőinek összege legalább $2 \left(\frac{2n}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Megjegyzés: Az a_i, b_i számok $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pozitív egészek. Az a_i / b_i és a_j / b_j számok különböző alakúak, ha a számlálójuk, vagy nevezőjük közül legalább az egyik különböző. Az a_i / b_i és a_j / b_j számok különböző értékűek, ha $a_i / b_i \neq a_j / b_j$.