

Lineáris algebra

Szombat délelőtt

1. Egy tízdimenziós térben kiválasztunk három kilencdimenziós alteret. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.
2. Ha egy V vektortér vektoraira $a \notin \langle b, c \rangle, b \notin \langle a, c \rangle, c \in \langle a, b \rangle$, akkor mi lehet c ?
3. Éjfélkor a hétfejű sárkány megjelent a királylánynál, felírt egy 13×21 -es 8 rangú valós mátrixot, és a következőket mondta. „Minden reggel megváltoztathatod a mátrix egy elemét. Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztathatom a mátrix egy elemét. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak.” Érdemes-e a királylánynak algebrát tanulnia?
4. A sárkány a királylány hűgához is bement. „Neked egy 8 rangú 8×8 -as M mátrixot kell most felírnod. Minden reggel meg kell változtatnod a mátrix egy elemét (tehát M -et már holnap reggel is). Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztatom a mátrix egy elemét. Mindketten mindig kötelesek vagyunk egyegy elemet ténylegesen meg is változtatni. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak.” A királylány hűga életben maradt-e?
5. Egy n -dimenziós valós euklideszi térben maximálisan hány olyan nem nulla vektor adható meg, melyek közül bármely kettő szöge α , ha $\alpha = 60^\circ$, illetve ha $\alpha = 120^\circ$?
6. Legfeljebb hány vektort lehet kiválasztani az n dimenziós térben úgy, hogy bármely kettő tompaszöget zárjon be?
7. Bizonyítsuk be, hogy minden nem nulla f egész együtthatós polinomnak van olyan nem nulla $g = fh$ polinom-szorosa, hogy g -ben minden tag kitevője prímszám (g, h is egész együtthatós polinomok).
8. A szultán gondolt $\mathbb{R}^{1001}$ -ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, hogy mik a koordinátái. Életben marad-e Seherezádé? Mi a helyzet akkor, ha mindig csak az első koordinátára kérdezhet rá, és a kegyelem feltétele az első bázisvektor kitalálása?
9. Vannak-e olyan $a(x), b(x), c(y), d(y)$ valós együtt hatós polinomok, amire

$$1 + xy + x^2y^2 = a(x)c(y) + b(x)d(y)$$

10. Egy n fős városban m klub van. Minden klubnak páratlan sok ember a tagja és bárhogy választunk ki két klubot, azon emberek száma, akik legalább az egyiknek tagjai páros. Lássuk be, hogy $m \leq n$.

11. (Fischer-egyenlőtlenség) Adott megint egy n fős város m klubbal. Bármely 2 klubnak pontosan $k \in \mathbb{Z}^+$ közös tagja van. Bizonyítsuk be, hogy $m \leq n$.

12. Legyen $\mathbb{Z}^n$ az egész számokból álló, n tagú sorozatok (azaz vektorok) halmaza. Ha

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$$

és

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$$

két ilyen vektor, akkor legyen

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (u_1 + w_1, \dots, u_n + w_n)$$

és

$$\mathbf{u} \vee \mathbf{w} = (\max(u_1, w_1), \dots, \max(u_n, w_n))$$

Kiindulásként felírtuk a táblára $\mathbb{Z}^n$ -nek s darab elemét. Ha egy adott pillanatban a (nem feltétlenül különböző) $\mathbf{u}$ és $\mathbf{w}$ vektorok már fel vannak írva a táblára, akkor az $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ és $\mathbf{u} \vee \mathbf{w}$ vektorokat is fel szabad írni a táblára. A kiindulási vektorok olyanok voltak, hogy $\mathbb{Z}^n$ bármely eleme felírható véges sok lépéssel. Mi az s legkisebb lehetséges értéke, ha $n = 2025$.

13. Legyen A (nem feltétlenül különböző) egész számok véges halmaza. Legyen $m \geq 2$ egész szám. Legyen egy S halmaz elemeinek összege S^* . Tegyük fel, hogy A -nak vannak olyan $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ részhalmazai, amikre $\{B_1^*, \dots, B_m^*\} = \{m, m^2, \dots, m^m\}$. Bizonyítsuk be, hogy A -nak legalább $m/2$ eleme van.