

Lagrange-multiplikátor módszer

Imolay András, olimpiai iskola tábor

1 Egyváltozós szélsőérték feladatok megoldása deriválással

Tétel 1.1. Legyen $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy $x \in U$ az f függvény lokális maximuma. Ekkor $f'(x) = 0$.

Lemma 1.2. Legyen I egy zárt intervallum, és legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Ekkor f -nek van globális maximuma, azaz létezik egy $x \in I$ pont úgy, hogy $f(x) \geq f(y)$ minden más $y \in I$ pontra.

Módszer

Fogalmazzuk át a feladatot olyan formára, hogy egy egyváltozós $f(x)$ függvényt kelljen maximalizálni egy I zárt intervallumon. A maximum létezik az előző lemma alapján.

Hol veheti fel a függvény a maximumát? Az előző tétel szerint csak azon x helyeken, melyek I belsejében vannak és $f'(x) = 0$, vagy az intervallum valamelyik szélén. Ez általában egy véges halmaz, elég ezeket összehasonlítani.

Gyakorló feladatok

- 1.1. Határozzuk meg az $x^2 - x^4$ függvény maximumát a $[-2, 2]$ intervallumon.
- 1.2. Egy egység sugarú körben húzzunk be egy átmérőt. Legfeljebb mekkora lehet a területe egy olyan téglalapnak, aminek két szomszédos csúcsa illeszkedik a behúzott átmérőre, és a másik két csúcsa a körön van?
- 1.3. Melyik a gömbbe írható maximális térfogatú egyenes körkúp?

2 Többváltozós szélsőérték feladatok megoldása deriválással

Tétel 2.1. Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek minden pontban létezik az összes parciális deriváltja. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x} \in U$ az f függvény lokális maximuma. Ekkor $\nabla(\mathbf{x}) = 0$, ahol $\nabla(\mathbf{x}) = (f'_1(\mathbf{x}), f'_2(\mathbf{x}), \dots, f'_n(\mathbf{x}))$ a parciális deriváltakból álló vektor.

2025. március 30.

Szakkörvezető: Imolay András(imolay.andras@gmail.com)

Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

Lemma 2.2. Legyen S egy korlátos és zárt halmaz, és legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Ekkor f -nek van globális maximuma S -en, azaz létezik egy $\mathbf{x} \in S$ pont úgy, hogy $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y})$ minden más $\mathbf{y} \in S$ pontra.

Módszer

Fogalmazzuk át a feladatot olyan formára, hogy egy többváltozós $f(\mathbf{x})$ függvényt kelljen maximalizálni egy S zárt halmazon. A maximum létezik az előző lemma alapján.

Hol veheti fel a függvény a maximumát? Az előző tétel szerint csak azon $\mathbf{x}$ helyeken, melyek S belsejében vannak és $\nabla(\mathbf{x}) = 0$, vagy a halmaz határán vannak. A szóba jövő belső pontok általában egy véges halmazt alkotnak, a határ pedig eggyel kisebb "dimenziós", így elég arra megoldani a feladatot.

Gyakorló feladatok

- 2.1. Határozzuk meg az $x^3 + y^3 - 9xy$ függvény minimumát, ahol $0 \leq x, y \leq 10$.
- 2.2. Határozzuk meg az $x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 5$ függvény minimumát, ahol x, y valós számok.
- 2.3. Egy egység sugarú gömbhöz tekintsünk egy s síkot, ami átmegy a gömb középpontján. Legfeljebb mekkora lehet a térfogata egy olyan téglatestnek, aminek van egy olyan lapja, mely az s síkban fekszik, és a szelvény lapjának mind a négy csúcsa a gömbre esik?

3 Lagrange multiplikátor módszer

Tétel 3.1. Legyen U az $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmaza, és legyenek $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ és $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyeknek a parciális deriváltjai is folytonosak. Tekintsük a következő "feltétel halmazt":

$$S = \{\mathbf{x} \in U \mid g(\mathbf{x}) = c\}$$

valamilyen valós c szám esetén. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x} \in S$ az f egy lokális maximuma S -ben. Ekkor vagy $\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ teljesül, vagy létezik egy $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, melyre

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}).$$

Lemma 3.2. Ha $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor a $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\mathbf{x}) = c\}$ halmaz zárt minden c valós számra.

Lemma 3.3. Ha $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt halmazok, akkor a metszetük is zárt.

2025. március 30.

Szakkörvezető: Imolay András(imolay.andras@gmail.com)

Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

Módszer

Az érthetőség kedvéért egy konkrét példán vezetjük végig a módszert:

Határozzuk meg abc maximumát a pozitív valós számok körében, amennyiben $a + b + c = 3$.

- Gondoljuk meg, hogy mi a maximalizálandó f függvény, és mi a feltételt elkódoló g függvény.
A példa feladatban $f(a, b, c) = abc$ és $g(a, b, c) = a + b + c$.
- Gondoljuk meg, hogy milyen U tartományon vizsgáljuk az f és g függvényeket. Ha lehet, tegyük korlátossá.
A példában az $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b, c > 0\}$ a vizsgált tartomány. Ehelyett azonban tekinthetjük inkább az $U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < a, b, c < 3\}$ tartományt.
- Ha ez a tartomány nem zárt, akkor tekintsük a lezártját.
A példában legyen $\bar{U} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq a, b, c \leq 3\}$.
- Gondoljuk meg, hogy a vizsgált $\bar{U}$ tartomány belsejében az f és g függvények tényleg parciálisan differenciálhatók, és folytonosak a parciális deriváltak.
Ez általában világos, ahogy a példában is.
- Az $\bar{U} \cap S$ zárt, ahol S a "feltétel halmaza", így f -nek létezik itt maximuma. A határt vizsgáljuk meg külön, $\bar{U}$ belső pontjaiban pedig tudjuk alkalmazni a tételt.
Ha (a, b, c) az $\bar{U}$ határán van, akkor valamelyik szám 0, így $f(a, b, c) = 0$, tehát itt nem lehet a maximum. A belső pontokban $\nabla g(a, b, c) = (1, 1, 1)$ és $\nabla f(a, b, c) = (bc, ac, ab)$. Ezek alapján $bc = ac = ab = \lambda$, így $a = b = c$. A feltételt kihasználva ekkor $a = b = c = 1$, így csak $f(a, b, c) = 1$ lehet a maximum.

Gyakorló feladatok

- 3.1. Mennyi az xy maximuma, ha tudjuk, hogy $x^2 + y^2 = 1$?
- 3.2. Legfeljebb mekkora lehet a^3b^2c , ha $a + 2b + 3c = 5$, ahol a, b, c nemnegatív valós számok.
- 3.3. Bizonyítsuk be a számtani-mértani egyenlőtlenséget Lagrange-multiplikátor módszerrel. Azaz ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

- 3.4. Mennyi $x^2 + y^2 + z^2$ maximuma, ha $xyz^2 = 1$?
- 3.5. Határozzuk meg az $x + y + z$ függvény maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ és $x^2 + z^2 = 1$ feltételek mellett.
- 3.6. Hat négyzet összterülete 2 egység. Mutassátok meg, hogy elhelyezhetőek átfedés nélkül egy 2×2 -es négyzetben.
- 3.7. Legyenek a, b, c nemnegatív valós számok, melyekre teljesül, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Bizonyítsuk be, hogy $0 \leq ab + bc + ca \leq 2$.
- 3.8. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c nemnegatív valós számok, melyekre $a + b + c = 1$, akkor

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{4}{27}.$$

2025. március 30.

Szakkörvezető: Imolay András(imolay.andras@gmail.com)

Az Olimpiai Iskola email címe: olimpiai.iskola@renyi.hu

Lagrange-multiplikátor módszer

Imolay András, olimpiai iskola tábor, házi feladatok

HF/1. Mennyi az xyz maximuma, ha tudjuk, hogy $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

HF/2. Legfeljebb mekkora lehet a^2b^3c , ha $a + 2b + 3c = 5$, ahol a, b, c nemnegatív valós számok.

HF/3. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c nemnegatív valós számok, melyekre $a + b + c = 1$, akkor

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{4}{27}.$$